TEMĂ
Reflexia și transmisia undelor electromagnetice plane

George Marian Vasilescu

15 Mai 2016

Exercițiul 1. O undă electromagnetică plană uniformă, de 3 GHz se propagă în sensul pozitiv al axei Oz prin mediul 1 $(\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ corespunzător semi-spațiului $z < 0$. La $z = 0$ unda întâlnește mediul 2 $(\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$ corespunzător semi-spațiului $z > 0$ (figura 1).

Pentru cele două medii se cunosc:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0, \mu_1 = \mu_0, \sigma_1 = 0 \quad \text{(Aer)}$$

$$\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0, \mu_2 = \mu_0, \sigma_2 = 1\ S/m$$

unde $\varepsilon_0 \approx \frac{1}{4\pi 9 \cdot 10^9} \frac{F}{m}$ este permitivitatea electrică absolută, iar $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{H}{m}$ este permeabilitatea magnetică absolută.

a) Ce formă are suprafața de discontinuitate în acest caz?

b) Să se calculeze coeficientul de reflexie a intensității câmpului electric $\underline{\Gamma}$, coeficientul de transmisie a intensității câmpului electric $\underline{\tau}$ și coeficientul de undă staționară (numit și raport de undă) S pentru mediul 1.

c) Să se determine mărimile din cerința anterioară făcând analogia cu liniile de transmisie și folosind diagrama Smith.

d) Care este interpretarea fizică a rezultatelor obținute la sub-punctul anterior? Apare o undă reflectată sau transmisă? Cât de “mari” sunt acestea în raport cu unda incidentă? Apare o undă staționară? Dacă da, unde este aceasta localizată?

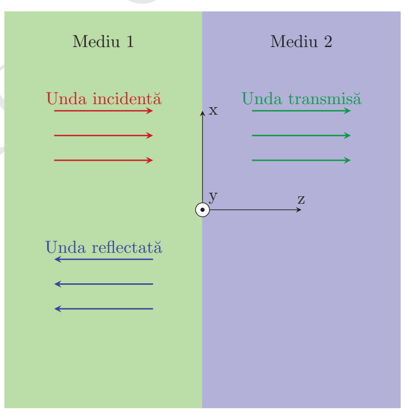

Figura 1: Incidența normală a unei unde electromagnetice plane uniforme pe o suprafață de discontinuitate.

Exercițiul 2. Să se rezolve problema 1 pentru cazul în care mediul 2 se înlocuiește cu unul fără pierderi pentru care se cunosc:

$$\varepsilon_2 = 9\varepsilon_0, \mu_2 = \mu_0, \sigma_2 = 0$$

Dacă ambele medii sunt fără pierderi, mai apar reflexii?

Exercițiul 3. Să se rezolve problema 1 pentru cazul în care mediul 2 se înlocuiește cu unul bun conductor (de exemplu cupru) pentru care se cunosc:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0, \mu_2 = \mu_0, \sigma_2 = 58MS/m \quad \text{(Cupru)}$$

Cât de pronunțată este reflexia? Apare o undă transmisa? Cum se modifică undele reflectată și transmisă dacă mediul bun conductor se înlocuiește cu unul perfect conductor?

Exercițiul 4. Ce valori ε_2, μ_2, σ_2 trebuie să aibă mediul 2 de la problemele anterioare, astfel încât unda incidentă să nu fie reflectată? Ce valori ar avea în acest caz coeficienții $\underline{\Gamma}$, $\underline{\tau}$, S ?

Exercițiul 5. Pentru mediile de la problema 1 se cunosc

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0, \mu_1 = \mu_0, \sigma_1 = 0$$

$$\varepsilon_2 = 16\varepsilon_0, \mu_2 = \mu_0, \sigma_2 = 0$$

După cum s-a văzut în problema 2, în acest caz unda incidentă este parțial reflectată în mediul 1. Se poate arăta că dacă mediul 2 este "învelit" cu un dielectric având proprietățile de material și grosimea bine stabilite undele nu mai sunt reflectate în mediul 1.

Să se calculeze grosimea g și proprietățile de materiale ale unui astfel de strat.

Soluții și indicii

Soluția 1.

Se determină permitivitățile complexe ale mediilor:

$$\underline{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1, \quad \underline{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 - j\frac{\sigma}{\omega} = (4-6j)\varepsilon_0$$

Se determină impedanțele intrinseci ale mediilor:

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377\ \Omega$$

$$\underline{\eta}_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\underline{\varepsilon}_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{(4-6j)\varepsilon_0}} \approx (0,328+0,175j)377\ \Omega$$

Pentru rezolvarea sub-punctului b) se aplică formulele deduse la curs:

$$\underline{\Gamma} = \frac{\underline{\eta}_2 - \underline{\eta}_1}{\underline{\eta}_2 + \underline{\eta}_1} \tag{1}$$

$$\underline{\tau} = \frac{2\underline{\eta}_2}{\underline{\eta}_2 + \underline{\eta}_1} = 1 + \underline{\Gamma} \tag{2}$$

$$S = \frac{1+|\underline{\Gamma}|}{1-|\underline{\Gamma}|} \tag{3}$$

și se obține $\underline{\Gamma} = -0,480 + 0,195j = 0,518e^{j157,89^\circ}$, $\underline{\tau} = -0,519 + 0,195j = 0,555e^{j20,57^\circ}$, $S = 3,153$.
Pentru rezolvarea sub-punctului c) se face analogia cu liniile de transmisie. Mediile 1 și 2 sunt înlocuite cu liniile 1 și 2 din figura 2.

Linia 2 din figură este infinit lungă. Drept urmare, pe aceasta nu apar reflexii[1]. Deoarece nu apar unde staționare, impedanța de-a lungul liniei nu variază[2] cu poziția, aceasta având în fiecare poziție aceiași valoare, și anume $\underline{Z}_{0_2}$.

Impedanța de intrare în linia 2 este , deci, $\underline{Z}_{in_2} = \underline{Z}_{0_2}$, circuitul echivalent căpătând ultima formă — desenată în figura 2. În acest context $\underline{Z}_{0_2}$ este impedanța de sarcină a liniei 1.

Determinarea coeficienților $\underline{\Gamma}$, $\underline{\tau}$, S se poate realiza ușor cu ajutorul diagramei Smith[3], calculându-se mai întâi impedanța de sarcină normalizată $\underline{z}_s = \underline{Z}_{0_2}/Z_{0_1} = 0,328 + 0,175j$. Procedura este arătată în figura 3.

Coeficientul de transmisie $\underline{\tau}$ se determină în felul următor:

[1]Unda ce se propagă de-a lungul ei nu ajunge niciodată la capăt, deci nu pot apărea reflexii.
[2]Vezi definiția impedanței de linie (numită și impedanță de undă) din cursurile anterioare.
[3]Vezi tema *Diagrama Smith*.

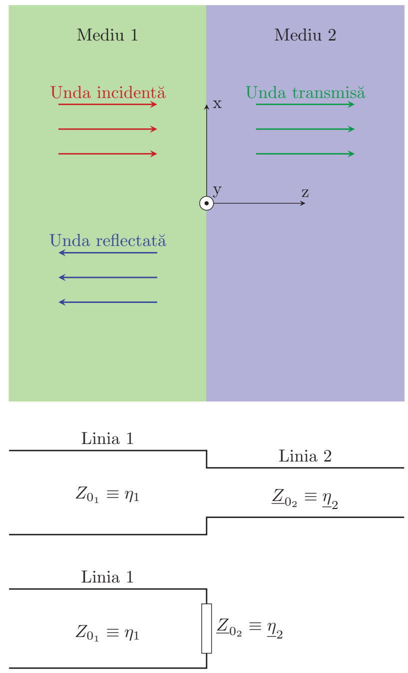

Figura 2: Analogia cu liniile de transmisie.

Pas 1: Se trasează un segment plecând din punctul de coordonate $r = 0, x = 0$ (punctul **A** pe figură) și se trece prin punctul în care este situat $\underline{z}_s$.

Pas 2: Se identifică argumentul numărului complex $\underline{\tau}$ de pe scala ANGLE OF TRANSMISSION COEFFICIENT IN DEGREES (punctul **B** pe figură).

Pas 3: Se identifică modulul numărului complex $\underline{\tau}$ de pe scala exterioară TRANSMISSION COEFFICIENT, E OR I. Se reține pe compas lungimea segmentului ce pleacă din $\underline{z} = 0 + 0i$ și ajunge în $\underline{z}_s$ și se transferă pe scala anterior menționată (punctul **C** pe figură). Se va avea grija ca vârful compasului să fie plasat în punctul din stânga al scalei, unde se află originea ei.

Soluția 2.
Rezolvarea este identică cu cea de la problema 1. Se obține

$$\eta_2 = \frac{1}{3}\eta_0, \underline{\Gamma} = -1/2 = 0,5e^{j180^\circ}, \underline{\tau} = 0,5e^{j0^\circ}, S = 3$$

Ținând cont de valorile $\underline{\Gamma}$, $\underline{\tau}$ se constată că apar reflexii și transmisii.

Soluția 3.
Impedanța intrinsecă a unui mediu bun conductor capătă următoarea formă:

$$\underline{\eta} \approx (1 + j)\frac{\alpha}{\sigma} \tag{4}$$

unde

$$\alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \tag{5}$$

Deci obținem: $\alpha = 828,8 \cdot 10^3\ rad/m$, $\underline{\eta} = 14,29 + 14,29j\ [m\Omega]$. De aici rezultă $\underline{\Gamma} = 0,999e^{j179,99^\circ}$, $\underline{\tau} = 75 \cdot 10^{-6}e^{j75\cdot 10^{-6^\circ}}$, $S = 26382,08$.

Din date rezultă că doar o foarte mică parte din unda incidentă este transmisă în mediul 2 (în cupru). După cum s-a arătat la curs, această undă incidentă se atenuează puternic în materialul conductor, adâncimea de pătrundere în acest caz fiind foarte mică $\delta = 1,2\ \mu m$.

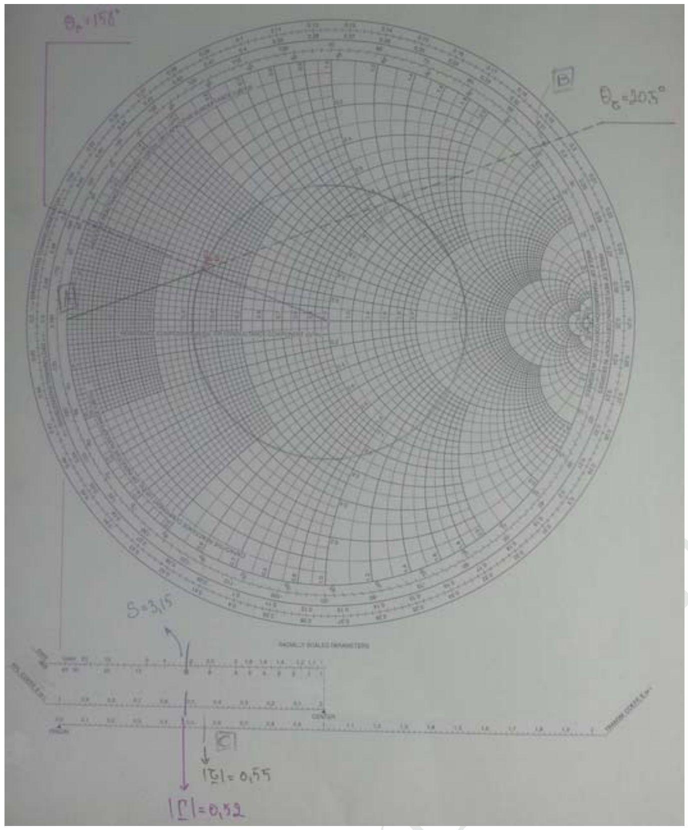

Figura 3: Obținerea $\underline{\Gamma}$, $\underline{\tau}$, S cu ajutorul diagramei Smith.

În cazul în care, în loc de cupru se pune un material perfect conductor, în analogia cu liniile de transmisie sarcina devine un scurtcircuit, deci unda incidentă va fi reflectată în întregime, iar undă transmisă nu va exista.

Soluția 5.

Mediul 2 se acoperă cu un strat de dielectric (ε_3, μ_3, $\sigma_3 = 0$) având grosimea g. Impedanțele intrinseci ale mediilor 1, respectiv 2 sunt:

$$\eta_1 = \eta_0 \approx 377\ \Omega, \quad \eta_2 = \frac{1}{4}\eta_0$$

Făcând analogia cu liniile de transmisie, se obțin trei astfel de linii conectate ca în figura 4.

Pe linia 2 de lungime infinită nu există reflexii, drept urmare impedanța ei de intrare este egală cu impedanța ei caracteristică $Z_{in_2} = Z_{0_2}$. Circuitul echivalent capătă ultima formă desenată în figura 4.

Pentru a elimina reflexiile de pe linia 1 , sarcina acesteia trebuie adaptată la linie. Dar impedanța de sarcină a acesteia este chiar impedanța de intrare în linia 3. Obținem

$$Z_{in_3} = Z_{0_1} \tag{6}$$

Linia 3 trebuie, deci, dimensionată astfel încât impedanța furnizată de ea la intrare să fie Z_{0_1}. Pentru simplitate se consideră grosimea

$$g = n\frac{\lambda}{4} \tag{7}$$

unde n este impar. În acest caz, linia devine un transformator de impedanță în $\lambda/4$. a cărui impedanță de intrare este:

$$Z_{in_3} = \frac{\text{imped. caract}^2}{\text{imped. sarc.}} = \frac{Z_{0_3}^2}{Z_{0_2}} \tag{8}$$

Înlocuind 6 în 8

$$Z_{0_3}^2 = Z_{0_1} Z_{0_2} \Rightarrow Z_{0_3} = \frac{1}{2} Z_{0_1} \tag{9}$$

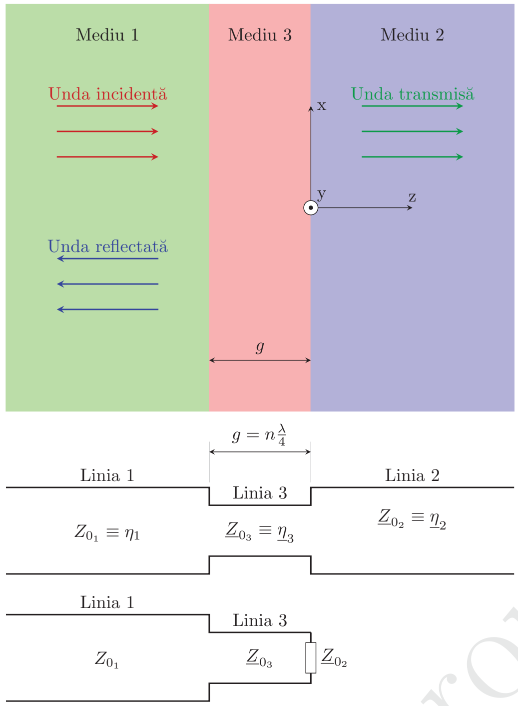

Figura 4: Eliminarea reflexiei pentru o undă electromagnetică plană uniformă incidentă normal pe planul $z = 0$.

Revenind la analogie se constată că $\eta_3 = \eta_1/2$. De aici se obțin proprietățile mediului

$$\varepsilon_3 = 4\varepsilon_0, \mu_3 = \mu_0, \sigma_3 = 0 \tag{10}$$

Lungimea de undă se obține cunoscând frecvența și viteza de fază

$$\lambda_3 = \frac{v_{f_3}}{f}$$

Deoarece mediul 3 este fără pierderi, viteza de fază se calculează ca $v_{f_3} = 1/\sqrt{\mu_3\varepsilon_3} = 0,5c$, lungimea de undă devenind $\lambda = 5\ cm$

Grosimea mediului rezultă din 7 și poate avea mai multe valori

$$g = 1,25\ cm \quad g = 3,75\ cm \quad g = 6,25\ cm \quad \ldots \tag{11}$$

Cunoscând valorile din relațiile 10 și 11, materialul 3 și grosimea acestuia sunt complet determinate. Problema a fost rezolvată.