TEMĂ
Unda electromagnetică armonică plană uniformă

George Marian Vasilescu

30 Apr. 2016

Exercițiul 1. O undă plană armonică plană uniformă de frecvență $f = 60\ GHz$ se propagă într-un mediu având permitivitatea electrică relativă $\varepsilon_r = 2$, permeabilitatea magnetică relativă $\mu_r = 1$ și conductivitatea electrică $\sigma \approx 2\omega\varepsilon_0\ [S/m]$. Cunoscându-se permitivitatea electrică absolută ε_0 și permeabilitatea magnetică absolută μ_0

$$\varepsilon_0 \approx \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}\ \frac{F}{m} \qquad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{H}{m}$$

se cere:

a) Permeabilitatea magnetică μ, permitivitatea electrică ε și permitivitatea electrică complexă $\underline{\varepsilon}$.

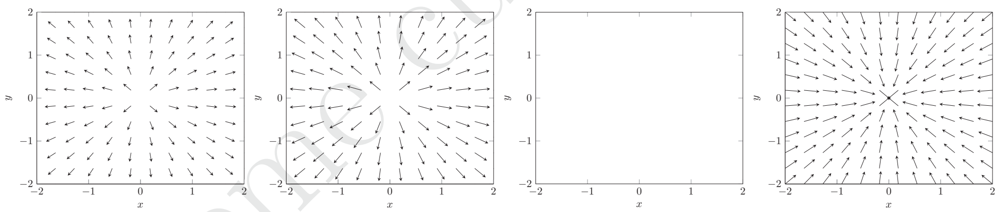
b) Constanta complexă de propagare $\underline{\gamma}$.

c) Constanta de atenuare α, constanta de fază β. Care din cele două mărimi indică faptul că mediul are pierderi? Ce fel de pierderi prezintă mediul din enunț?

d) Impedanța intrinsecă a mediului $\underline{\eta}$.

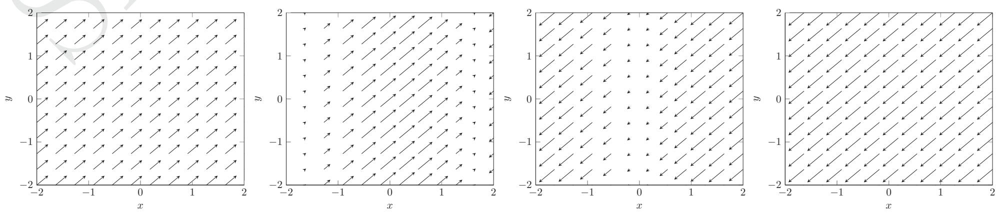
e) Lungimea de undă λ.

Exercițiul 2. În figurile 1, 2, 3 este reprezentată intensitatea câmpului electric, în planul $z = 0$, a unei unde electromagnetice ce se propagă în sensul $+z$. Cu T s-a notat perioada. Arătați care din cele trei câmpuri vectoriale sunt asociate unei unde electromagnetice *plane și uniforme*. Argumentați.



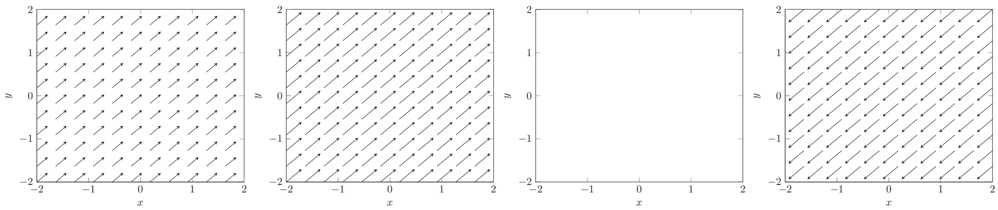
(a) $t = 0,125T$ **(b)** $t = 0,25T$ **(c)** $t = 0,5T$ **(d)** $t = 0,75T$

Figura 1: Câmpul vectorial $\vec{E}_1(x, y, z, t)$ reprezentat în planul $z = 0$, la diverse momente de timp t.



(a) $t = 0,125T$ **(b)** $t = 0,25T$ **(c)** $t = 0,5T$ **(d)** $t = 0,75T$

Figura 2: Câmpul vectorial $\vec{E}_2(x, y, z, t)$ reprezentat în planul $z = 0$, la diverse momente de timp t.



(a) $t = 0,125T$ **(b)** $t = 0,25T$ **(c)** $t = 0,5T$ **(d)** $t = 0,75T$

Figura 3: Câmpul vectorial $\vec{E}_3(x, y, z, t)$ reprezentat în planul $z = 0$, la diverse momente de timp t.

Exercițiul 3. Ce expresie are intensitatea câmpului electric $\underline{\vec{E}}(z)$ și intensitatea câmpului magnetic $\underline{\vec{H}}(z)$ în cazul unei unde electromagnetice armonice plane uniforme? Cum se modifică expresia dacă unda se propagă *doar* în sensul $+z$?

Exercițiul 4. Să se determine pentru intensitatea câmpului electric $\vec{E}(z, t) = 3\sqrt{2}\sin(10^9\pi t - 200\pi z + \pi/4)\vec{i} + 6\sin(10^9\pi t - 200\pi z)\vec{j}$ $[V/m]$:

a) Valorile efective și amplitudinile,

b) Frecvența, perioada,

c) Lungimea de undă,

d) Fazele,

e) Avansurile de fază.

Exercițiul 5. O undă electromagnetică plană uniformă, de frecvență $f = 3\ GHz$ se propagă într-un mediu având conductivitatea electrică $\sigma = 0\ [S/m]$, permitivitatea electrică relativă $\varepsilon_r = 9$ și permeabilitatea magnetică relativă $\mu_r = 1$. Se cere:

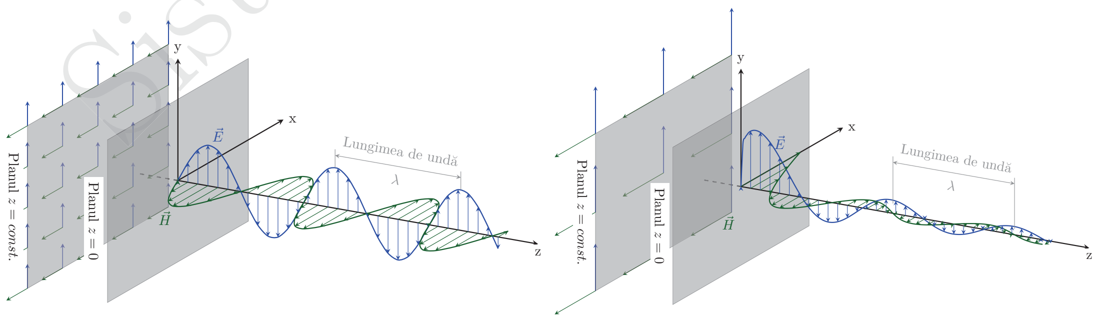
a) Să se specifice, argumentând, dacă mediul prezintă sau nu pierderi prin efect Joule,

b) Constanta (complexă) de propagare $\underline{\gamma}$, constanta de atenuare α, constanta de fază β și numărul de undă (unghiular) k,

c) Impedanța intrinsecă a mediului η. De câte ori este aceasta mai mică decât impedanța intrinsecă a vidului η_0?

d) Viteza de fază v_f. De câte ori este aceasta mai mică decât viteza luminii în vid c?

e) Care din cele două grafice din figura 4 *poate* descrie evoluția în spațiu a undei?



(a) O undă neamortizată **(b)** O undă amortizată

Figura 4: Variația în spațiu a intensităților $\vec{E}(z, t_f)$ și $\vec{H}(z, t_f)$ ale câmpurilor electric, respectiv magnetic, pentru un moment de timp *oarecare*, *fixat* t_f. Unda se propagă în sensul pozitiv al axei Oz. În planul $z = const.$ sunt reprezentați vectorii $\vec{E}(z, t_f)$ și $\vec{H}(z, t_f)$.

Exercițiul 6. În figura 4 este reprezentată variația în spațiu a intensității câmpului electric $\vec{E}(z,t)$ și a intensității câmpului magnetic $\vec{H}(z,t)$ la un moment de timp t oarecare, pentru două unde electromagnetice plane, uniforme și monocromatice.

a) După cum s-a arătat la curs, vectorii $\vec{E}$ și $\vec{H}$ sunt definiți în tot spațiul $\mathbb{R}^3$. Explicați de ce, pentru descrierea undei, este suficient să desenăm doar o singură pereche de vectori $(\vec{E}, \vec{H})$ din plan.

b) Ce proprietăți ale mediului provoacă amortizarea reprezentată în 4b?

c) De ce $\vec{E}$ și $\vec{H}$ trec *simultan* prin zero în cazul undei neamortizate din figura 4a?

Exercițiul 7. În figura 5 este reprezentată intensitatea câmpului electric $\vec{E}(z,t)$ și cea a câmpului magnetic $\vec{H}(z,t)$ ale unei unde electromagnetice plane uniformă ce se propagă într-un *mediu fără pierderi*.

a) În ce direcție se propagă unda în fiecare din cele două cazuri?

b) Care este unghiul dintre $\vec{E}$ și $\vec{H}$ pentru unda electromagnetică plană uniformă? Dar unghiul dintre oricare din acești doi vectori și direcția de propagare?

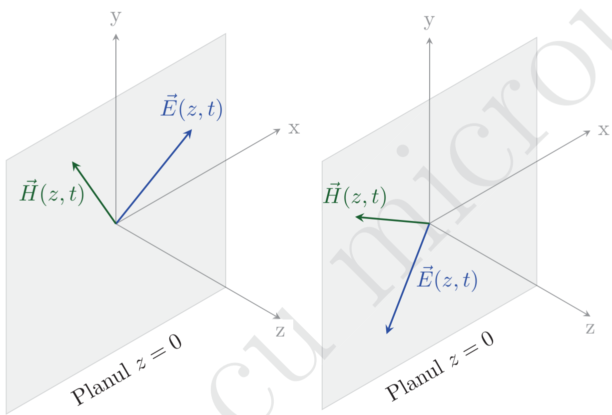


Figura 5: Intensitățile $\vec{E}(z,t)$ și $\vec{H}(z,t)$ ale câmpurilor electric, respectiv magnetic, pentru un moment de timp t *oarecare*. Cei doi vectori sunt situați în planul $z = 0$.

Exercițiul 8. Menționați tipul de polarizare pentru fiecare din cele trei unde reprezentate în figura 6: Ce tip de polarizare prezintă unda din figura 4a?

Exercițiul 9. Domeniul $\mathbb{R}^3$ este împărțit în două semi-spații infinit extinse. Semi-spațiul $(z < 0)$ corespunde undei zone de aer ($\sigma = 0$, $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$) iar semi-spațiul $(z > 0)$ unei zone de cupru ($\sigma = 58\ MS/m$, $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$). O undă electromagnetică plană de frecvență $f = 300\ MHz$ se propagă prin aer, în sensul pozitiv al axei Oz. Să se calculeze, pentru semi-spațiul $(z > 0)$:

a) Constanta (complexă) de propagare $\underline{\gamma}$, constanta de atenuare α și constanta de fază β. De ce este $\alpha \neq 0$ în acest caz și ce semnifică acest lucru?

b) Impedanța intrinsecă a mediului $\underline{\eta}$.

c) Viteza de fază v_f.

d) Adâncimea de pătrundere δ. Care este semnificația acestei mărimi? Dacă mărim frecvența ce se întâmplă cu adâncimea de pătrundere?

e) Dacă valoarea efectivă a intensității câmpului magnetic $\vec{H}$ la $z = 0$ este $200\ \frac{mA}{m}$ ce valoare are aceasta la $z = \delta$?

f) Calculați la ce distanță față de frontiera semi-spațiului, amplitudinea intensității câmpului electric $\vec{E}$ devine 1% din amplitudinea de la $z = 0$.

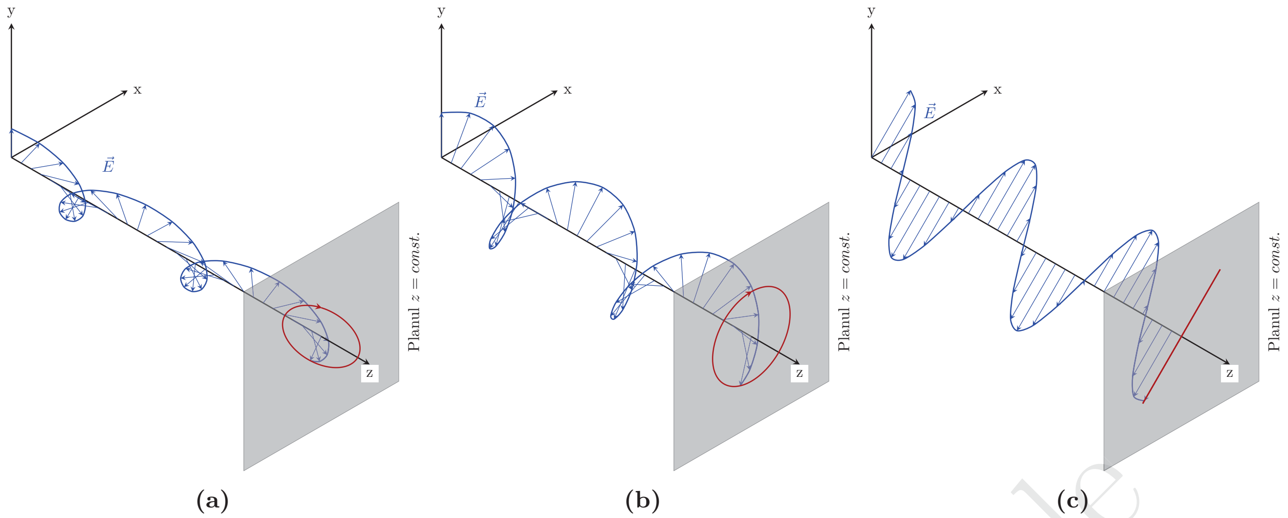


Figura 6: Variația în spațiu a intensității câmpului electric $\vec{E}(z,t)$ pentru un moment de timp t *oarecare*. În planul $z = const.$ este trasat cu roșu conturul trasat de vârful vectorului $\vec{E}$ pe măsură ce acesta variază *în timp*.

Soluții și indicii

Soluția 1.

a) $\mu = \mu_r\mu_0 = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0 = 2\varepsilon_0$
$\underline{\varepsilon} = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \approx 2\varepsilon_0(1-j)$

b) $\underline{\gamma} = j\omega\sqrt{\mu\underline{\varepsilon}} = j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{2(1-j)} = j\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{2\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}} = 80,87 + 195,25\ j\ [1/m]$

c) $\alpha = \mathrm{Re}(\underline{\gamma}) = 80,87\frac{Np}{m}$, $\beta = \mathrm{Im}(\underline{\gamma}) = 195,25\frac{rad}{m}$
Deoarece $\alpha \neq 0$, unda se atenuează, deci mediul este cu pierderi. Acesta prezintă pierderi prin conducție (sau „prin efect Joule") – în enunț nu se specifică existența și altor tipuri de pierderi.

d) $\underline{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\underline{\varepsilon}}} = \eta_0\sqrt{\frac{1}{2(1-j)}} \approx 377(0.54 + 0.22j) = 207,09 + 85.78j\ [\Omega]$, unde $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377 \approx 120\pi\ [\Omega]$ este impedanța intrinsecă a vidului.

e) $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \implies \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 3,21\ cm$

Soluția 2.
Pentru a stabili dacă unda electromagnetică este plană și uniformă trebuie îndeplinite două condiții: **(1)** frontul de undă trebuie să fie un plan și **(2)** câmpul vectorial trebuie să fie uniform — fiecare vector $\vec{E}$ din plan trebuie să aibă aceiași *direcție* şi *orientare*.

Deoarece câmpul vectorial din figura 1 nu respectă condiția **(2)**, unda electromagnetică nu este uniformă. Totuși, o analiză mai detaliată a figurii relevă că toți vectorii din plan sunt în fază — de exemplu toți trec simultan prin zero. Drept urmare frontul de undă este un plan.

Câmpul vectorial din figura 2 pare a fi uniform. Analizând evoluția în timp a acestuia se poate constata că faza nu este constantă în plan — de exemplu nu toți vectorii trec simultan prin zero. Drept urmare unda nu este plană.

Unda electromagnetică din figura 3 respectă ambele condiții: este plană deoarece toți vectorii au aceiași fază în planul $z = 0$ și este uniformă deoarece, la orice moment de timp t, vectorii au aceiași orientare — același sens și aceiași direcție.

Soluția 5.
$\underline{\gamma} = 188,49j\ [1/m]$, $\alpha = 0\ Np/m$, $\beta = 188,49\ rad/m = k$, $\lambda = 0,0333\ m$, $\eta = 125,66\ \Omega$, $v_f = 10^8\ m/s$.

Soluția 8.
Unda electromagnetică este *eliptic polarizată* în figura 6a, *circular polarizată* în figura 6b și *liniar polarizată* în figura 6c.

Soluția 9.
$\underline{\gamma} = 262,0924 \cdot 10^3 + 262,0924 \cdot 10^3 j\ [1/m]$, $\alpha = \beta$, $\alpha = 262,0924 \cdot 10^3\ Np/m$, $\beta = 262,0924 \cdot 10^3\ rad/m$.
Impedanța intrinsecă a mediului se deduce din forma generală $\underline{\eta} = \sqrt{\mu/\underline{\varepsilon}}$, ținând cont de faptul că, în cazul mediilor bune conductoare avem $\varepsilon''/\varepsilon' > 100$

$$\underline{\eta} = (1+j)\frac{\alpha}{\sigma}$$

Pentru datele numerice ale problemei se obține $\underline{\eta} = 4,518 \cdot 10^{-3} + 4,518 \cdot 10^{-3}\ [\Omega]$
$v_f = 7,19 \cdot 10^3\ m/s$, $\delta = 3,81 \cdot 10^{-6}\ m = 3,81\ \mu m$