TEMĂ
Recapitulare algebră și analiză vectorială

George Marian Vasilescu

16 Apr. 2016

Exercițiul 1. Cunoscându-se punctele $A(4, 5, 0)$, $B(3, 2, 0)$ să se calculeze și să se reprezinte grafic:

a) *vectorii de poziție* $\vec{r}_A$ și $\vec{r}_B$ asociați celor două puncte

b) vectorul sumă $\vec{r}_A + \vec{r}_B$

c) vectorul diferență[1] $\vec{r}_A - \vec{r}_B$

d) vectorul $\alpha\vec{r}_A$, pentru cazurile $\alpha = 2$, $\alpha = -2$, $\alpha = 0,5$, $\alpha = 1$, $\alpha = 0$

Exercițiul 2. Să se calculeze vectorii:

a) $\vec{u}_1 = 0,2(3\vec{a} + 2\vec{b})$ cunoscându-se $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$ și $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

b) $\underline{\vec{u}}_2 = j \cdot (2\underline{\vec{a}} - \underline{\vec{b}})$ cunoscându-se[2] $\underline{\vec{a}} = (4 + 2j)\vec{i} + (2 - j)\vec{j}$ și $\underline{\vec{b}} = 2\vec{i} + j\vec{j} - 4\vec{k}$

Exercițiul 3. Să se calculeze *modulul*[3] vectorilor:

a) $\vec{a} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

b) $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$

c) $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{v} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$; ce reprezintă vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$?

d) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

e) $\underline{\vec{v}} = (2 + 2j)\vec{i} + 3\vec{j} - 8j\vec{k}$

Exercițiul 4. Să se calculeze produsul scalar dintre următorii vectori:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$, unde $\vec{u} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$, $\vec{v} = 3\vec{i}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v}$, unde $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$ și $\vec{v} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

c) $\vec{u} \cdot \vec{i}$, $\vec{u} \cdot \vec{j}$, $\vec{u} \cdot \vec{k}$, unde $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$
Ce reprezintă produsul scalar dintre un *vector* și un *versor*?

d) $\vec{u} \cdot \vec{v}$, unde $\vec{u} = 3\vec{i} + 1\vec{j}$ și $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$
Cum sunt cei doi vectori orientați unul față de celălalt? Completați următoarea propoziție: *Produsul scalar dintre doi vectori nenuli $\vec{u}$ și $\vec{v}$ este întotdeauna nul ($\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$) dacă și numai dacă* ....

e) $\underline{\vec{p}} \cdot \underline{\vec{q}}$, unde $\underline{\vec{p}} = j\vec{i} + (1 + j)\vec{j} + 2\vec{k}$ și $\underline{\vec{q}} = i\vec{i} + (1 - j)\vec{j} + j\vec{k}$

[1] În acest context, acesta este *vectorul distanță* asociat punctelor A și B
[2] Nu confundați vectorul $\vec{j}$ cu numărul complex $j \equiv \sqrt{-1}$
[3] *Norma* euclidiană

Exercițiul 5. Să se calculeze produsul vectorial dintre următorii vectori:

a) $\vec{u}\times\vec{v}$ și $\vec{v}\times\vec{u}$, unde $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ și $\vec{v}=\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$
Cum este orientat, întotdeauna, vectorul $\vec{u}\times\vec{v}$ în raport cu vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$?

b) $\vec{i}\times\vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{i}$

c) $\vec{u}\times\vec{v}$, $\vec{u}\times\vec{u}$ și $\vec{u}\times(-\vec{v})$, unde $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+2\vec{j}$
De ce rezultatul în toate cele trei cazuri este egal cu *vectorul zero*?

Exercițiul 6. Să se deseneze și să se determine **expresia** pentru componenta normală și cea tangențială a vectorului $\vec{B}$ din figură. Se consideră că versorii $\vec{n}$ și $\vec{t}$ ai dreptelor tangentă și normală la suprafață sunt cunoscuți.

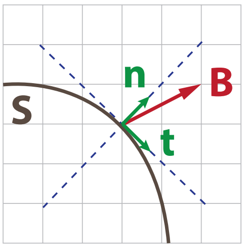


Figura 1: Obținerea componentelor normală și tangențială ale vectorului $\vec{B}$.

Exercițiul 7. Să se aplice operatorul *gradient* câmpurilor scalare descrise de următoarele funcții: a) $f(x,y)=x$; b) $g(x,y)=xy$

Exercițiul 8. Să se aplice operatorul *divergență* câmpurilor vectoriale descrise de următoarele funcții: a) $\vec{u}(x,y)=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}$; b) $\vec{v}(x,y)=y\vec{i}-x\vec{j}$.

Exercițiul 9. Să se aplice operatorul *rotor* câmpurilor vectoriale descrise de următoarele funcții: a) $\vec{u}=y\vec{i}-x\vec{j}$; b) $\vec{v}=y\vec{i}$

Exercițiul 10. Cunoscând vectorul de poziție $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ asociat punctului $P(x,y,z)$, să se demonstreze:

a) $\mathrm{div}(\vec{r})=3$

b) $\mathrm{rot}(\vec{r})=0$

c) $\mathrm{rot}(\vec{r}f(r))=0$

d) $\mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{r})=0$

Exercițiul 11. Să se demonstreze:

a) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi)=0$ pentru o funcție scalară φ

b) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{A})=0$ pentru o funcție vectorială $\vec{A}$

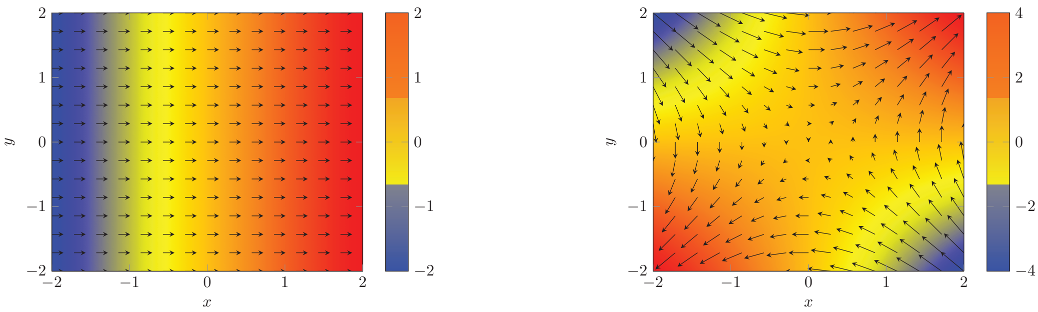
Exercițiul 12. *(Opțional)* Să se reprezinte grafic, în planul $z=0$, funcțiile de mai jos. Cum anume se modifică distribuția câmpului vectorial dacă reprezentăm funcțiile pe un alt plan $z>0$?

a) $\vec{E}=E_x(z)\vec{i}+E_y(z)\vec{j}$, unde $E_x(z)=2$ și $E_y(z)=1$,

b) $\vec{E}=E_x(z)\vec{i}+E_y(z)\vec{j}$, unde $E_x(z)=x(z+2)$ și $E_y(z)=y(z+2)$,

c) $\vec{A}=2\vec{k}$,

d) $\vec{H}=y\vec{i}-x\vec{j}$.



(a) $f(x, y) = x$, $\text{grad}(f) = \vec{i}$ (b) $g(x, y) = xy$, $\text{grad}(g) = y\vec{i} + x\vec{j}$

Figura 2: Reprezentarea grafică a funcțiilor scalare f și g (harta de culori) și a funcțiilor vectoriale $\text{grad}(f)$ și $\text{grad}(g)$ (vectorii)

Soluții și indicii

Soluția 1.
$\vec{r}_A = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 0\vec{k}$

Soluția 2.
În cazul celei de-a doua cerințe, spațiul vectorial este definit peste mulțimea numerelor complexe. Drept urmare, componentele vectorului sunt numere complexe. Rezultatul este $\underline{\vec{u}}_2 = (-4 + 6j)\vec{i} + (3 + 4j)\vec{j} + (4j)\vec{k}$.

Soluția 3.
$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} = 7,071$. Vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt *versori* (numiți și *vectori unitate*), modulul lor fiind 1.

Vectorul $\underline{\vec{v}}$ este definit peste mulțimea numerelor complexe. Prin definiție, norma unui vector, indiferent de natura lui, trebuie să fie un număr real. Drept urmare, expresia normei acestor vectori este ușor diferită față de cea a vectorilor reali (*în ce constă diferența?*):

$$\begin{aligned}|\underline{\vec{v}}| &= \sqrt{|v_x|^2 + |v_y|^2 + |v_z|^2} \\ &= \sqrt{|2 + 2j|^2 + |3|^2 + |-8j|^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 3^2 + 8^2} = 9\end{aligned}$$

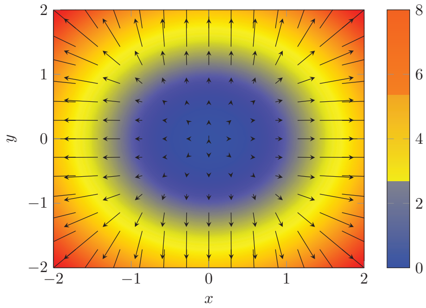
Soluția 4.
a) 12; b) 8

În mod similar normei vectorilor complecși, produsul scalar trebuie să îndeplinească anumite condiții. Drept urmare produsul scalar a doi astfel de vectori este ușor diferit față de cel din cazul vectorilor reali (*în ce constă diferența?*):

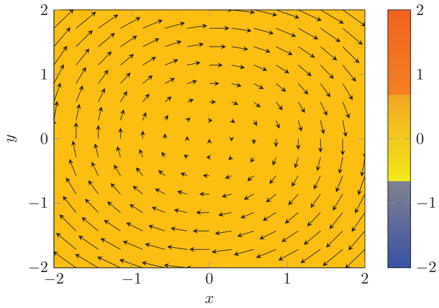
$$\begin{aligned}\underline{\vec{p}} \cdot \underline{\vec{q}} &= \underline{p_x}\ \underline{q_x}^* + \underline{p_y}\ \underline{q_y}^* + \underline{p_z}\ \underline{q_z}^* \\ &= j \cdot 1 + (1 + j) \cdot (1 + j) + 2 \cdot (-j) = j\end{aligned}$$

Soluția 6.
Se folosesc rezultatele din problema 4, sub-punctul c).

Soluția 7.
Funcțiile f și g sunt reprezentate în figura 2. Tot acolo sunt reprezentate câmpurile vectoriale obținute în urma aplicării operatorului gradient: $\text{grad}(f) = \vec{i}$ şi $\text{grad}(g) = y\vec{i} + x\vec{j}$.

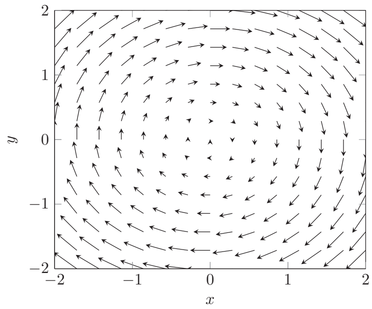


(a) $\vec{u}(x,y) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j}$, $\mathrm{div}\vec{u} = x^2 + y^2$

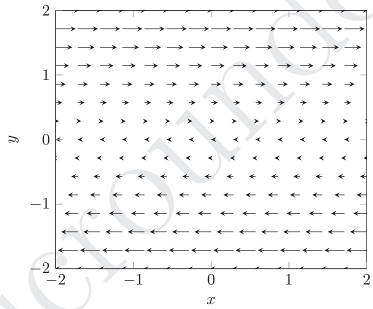


(b) $\vec{v}(x,y) = y\vec{i} - x\vec{j}$, $\mathrm{div}\vec{v} = 0$

Figura 3: Reprezentarea grafică a funcțiilor vectoriale $\vec{u}$ și $\vec{w}$ (vectorii) și a funcțiilor scalare $\mathrm{div}\vec{u}$ și $\mathrm{div}\vec{v}$ (harta de culori)



(a)



(b)

Figura 4

Soluția 8.

Funcțiile $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt reprezentate în figura 3. Tot acolo sunt reprezentate câmpurile scalare obținute în urma aplicării operatorului divergență: $\mathrm{div}\vec{u} = 2x + 2y$ şi $\mathrm{div}\vec{v} = 0$.

Soluția 9.

Se aplică operatorul rotor (vezi formula de la curs) și se obține: $\mathrm{rot}(\vec{u}) = -2\vec{k}$, $\mathrm{rot}(\vec{v}) = \vec{k}$. (cum „arată" acestea în spațiu?). Funcțiile u și v sunt reprezentate în figurile 4.

Soluția 10.

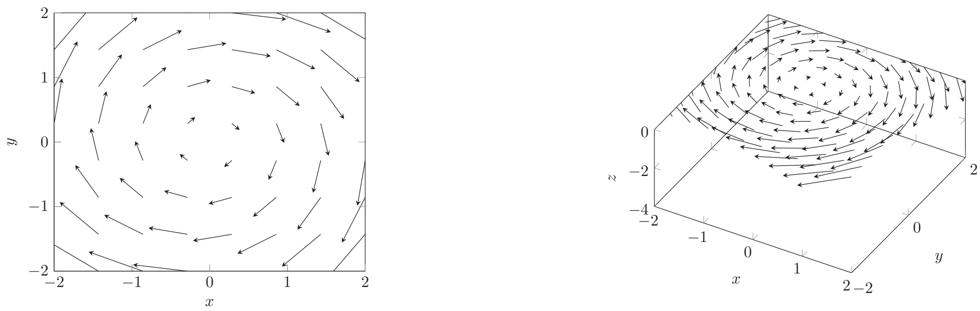
a) Se aplică operatorul divergență.

b) Se aplică operatorul rotor.

c) Se exprimă toți operatorii cu ∇ și se ține cont de proprietățile acestuia[4]

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}(\vec{r}f(r)) &= \nabla \times (\vec{r}f(r)) && \text{(Scriem pe rot cu ajutorul lui nabla)}\\
&= \nabla \times (\underset{\uparrow}{\vec{r}}\, f(r)) + \nabla \times (\vec{r}\, f(\underset{\uparrow}{r})) && \text{(Derivarea produsului de funcții)}\\
&= (\nabla \times \vec{r}) f(r) + (\nabla f) \times \vec{r} && \text{(Aducem funcția asupra căreia acționează nabla, lângă acesta)}\\
&= \underbrace{(\nabla \times \vec{r})}_{0} f(r) + \frac{df}{dr}\underbrace{\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{r}}_{0} = 0
\end{aligned}
$$

[4]Se "comportă" ca o operație de derivare dar și ca un vector – vezi cursul și seminarul de la Teoria Câmpului Electromagnetic



(a) Vedere de sus

(b) Vedere din perspectivă

Figura 5: Reprezentarea grafică a funcției $\vec{H} = y\vec{i} - x\vec{j}$ în câteva puncte alese.

Soluția 11.

Se folosesc proprietățile lui ∇ și ale produselor: scalar, vectorial și mixt. De exemplu, $\text{div}(\text{rot}\vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla \times \nabla) = \vec{A} \cdot 0 = 0$.

Soluția 12.

Funcția $\vec{H} = y\vec{i} - x\vec{j}$ este reprezentată în figura 5.