TEMĂ
Unde progresive pe linii de transmisie

George Marian Vasilescu

12 Mar. 2016 (Rev. 22 Mar. 2018)

Exercițiul 1. Pe liniile de transmisie din figurile 1 și 2 s-au stabilit undele progresive reprezentate grafic în aceleași figuri. În figura 2 sunt indicate și valorile *amplitudinii* pentru diverse poziții z. Se cere:

a) lungimea de undă λ și constanta de fază β,

b) pulsația ω, perioada T și frecvența f dacă viteza de fază este $v_f = \frac{1}{3}c$, unde $c \approx 3 \times 10^8\ m/s$ este viteza luminii în vid ,

c) amplitudinea, valoarea efectivă și constanta de atenuare α

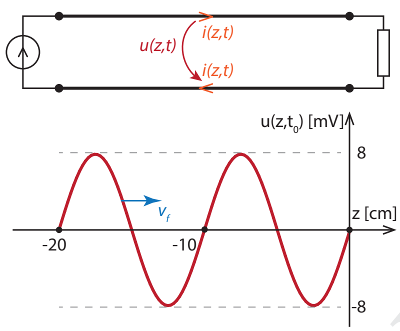

Figura 1: Unda de tensiune la un moment de timp $t = t_0$ fixat.

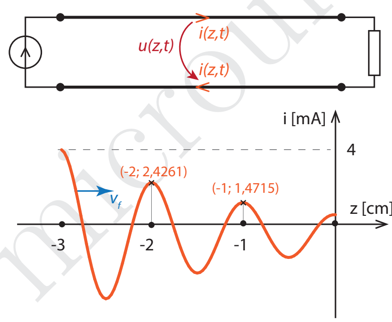

Figura 2: Unda de curent la momentul de timp $t = 0$.

Exercițiul 2. Pentru unda de tensiune armonică și progresivă având expresia:

$$u(z,t) = 60e^{0,5z} \sin(12 \cdot 10^9 \pi t + 40\pi z + \pi/3)\ [\mu V]$$

se cere:

a) amplitudinea și valoarea efectivă;

b) pulsația, perioada și frecvența;

c) constanta de atenuare, constanta de fază și lungimea de undă;

d) faza, faza inițială și faza de referință;

e) viteza de fază;

f) să se specifice în ce sens se propagă unda;

g) expresia tensiunii $\underline{U}(z)$ în complex;

h) **Graficele**: (a) tensiune în funcție de poziție $u(z,t)$ la momentul $t = 0$ *(Opțional)*; (b) amplitudinea tensiunii în funcție de poziție U(z) (cum ar arăta acest grafic dacă $\alpha = 0$); (c) tensiunea complexă $\underline{U}(z)$ în planul complex pentru $z = \lambda/4$ *(Opțional)*.

Exercițiul 3. Să se determine expresiile în timp pentru următoarele unde. Să se specifice la fiecare în parte dacă este *directă* sau *inversă*.

a) $\underline{I}(z) = 4e^{j(2\pi z+\pi)}[A]$ cunoscându-se frecvența $f = 50\ Hz$

b) $\underline{U}(z) = 5\sqrt{2}e^{j(-\pi z)}[V]$ cunoscându-se frecvența $f = 100\ Hz$

c) $\underline{I}(z) = 4e^{2z}e^{j(2\pi z+\pi)}\ [A]$ cunoscându-se frecvența $f = 1\ MHz$

Exercițiul 4. La bornele următoarelor linii de transmisie, de lungimi l, se aplică o tensiune sinusoidală de frecvență f. Se constată, că la frecvența respectivă, viteza de fază are valoarea v_f. Care din aceste linii sunt *lungi*?

a) o linie bifilară aeriană; $l = 3\ km$, $f = 50\ Hz$, $v_f = 0,5c$

b) un cablu coaxial; $l = 100\ m$, $f = 100\ MHz$, $v_f = 0,8c$

c) o linie microstrip; $l = 3\ cm$, $f = 100\ GHz$, $v_f = c$

Exercițiul 5. Pentru un cablu coaxial se cunosc *parametrii primari*: rezistența lineică $R' = 4\ m\Omega/m$, inductivitatea lineică $L' = 300\ nH/m$, conductanța lineică $G' = 450\ nS/m$ și capacitatea lineică $C' = 160\ pF/m$. Să se calculeze, pentru frecvența $f = 1\ MHz$, *parametrii secundari*: constanta complexă de propagare $\underline{\gamma}$ și impedanța caracteristică $\underline{Z}_0$.

Exercițiul 6. Calculați impedanța caracteristică a unei linii de transmisie pe care s-au stabilit undele de tensiune și de curent:

$$\underline{U} = 150e^{-\underline{\gamma} z} + 75je^{\underline{\gamma} z}\ [V] \qquad \underline{I} = 2e^{-\underline{\gamma} z} - je^{\underline{\gamma} z}\ [A]$$

Exercițiul 7. La bornele de intrare a unei linii de transmisie de lungime $l = 2,25\ cm$ se aplică o tensiune $e(t) = 200\sqrt{2}sin(\omega t + \pi/2)[\mu V]$. La bonele de ieșire ale liniei este conectată o sarcină ce nu reflectă undele (sarcina este *adaptată* liniei). Cunoscând constanta de propagare $\underline{\gamma} = 200\pi j\ [1/m]$ și impedanța caracteristică $\underline{Z}_0 = 75\ \Omega$ să se determine undele de tensiune $\underline{U}(z)$ și de curent $\underline{I}(z)$ ce se stabilesc pe linie.

Soluții și indicii

Soluția 1.

Prima linie: $\lambda = 10\ cm$, $\beta = 20\pi\ \frac{rad}{m}$, $T = \lambda/v_f = 1\ ns$, amplitudinea este $\hat{U} = 8\ mV$, valoarea efectivă este $U = 4\sqrt{2}\ mV$, constanta de atenuare este $\alpha = 0$ (unda nu se atenuează).

A doua linie: $\lambda = 1\ cm$, $\beta = 200\pi\ \frac{rad}{m}$, $T = \lambda/v_f = 0,1\ ns$. Constanta de atenuare rezultă din cele două valori din grafic precum și din expresia amplitudinii: $\alpha = ln(1,6487)/0,01 \approx 50\ Np/m = 0,5\ Np/cm$. Constanta $\hat{I} = 1,4715/e^{0,01\times 50} \approx 0,8925$ rezultă înlocuind pe α în expresia amplitudinii. Amplitudinea este $\hat{I}e^{-\alpha z} = 0,8925e^{-50z}\ [mA]$, valoarea efectivă este $0,631e^{-50z}\ [mA]$. Ce valoare ar fi avut $\hat{I}$, dacă originea axei Oz ar fi fost aleasă la sursă (la intrarea în linie)?

Soluția 2.

a) $60e^{0,5z}\ [\mu V]$, $30\sqrt{2}e^{0,5z}\ [\mu V]$

b) $\omega = 12 \cdot 10^9\pi\ rad/s$, $f = 6\ GHz$, $T \approx 0,166\ ns$

c) $\alpha = 0,5\ Np/m$, $\beta = 40\pi\ rad/m$, $\lambda = 5\ cm$

d) $\phi(z,t) = 12 \cdot 10^9\pi t + 40\pi z + \pi/3$, $\phi(z, t = 0) = 40\pi z + \pi/3$, $\varphi = \pi/3$,

e) $v_f = 3 \cdot 10^8\ m/s$, aproximativ egală cu viteza luminii în vid $c = 299\ 792\ 458\ m/s$,

f) Unda se propagă în sensul invers axei Oz (notăm cu $-z$),

g) Dacă $\alpha = 0$, atunci graficul amplitudinii este o dreaptă orizontală.

Soluția 3.
Indiciu: Putem folosi formula $u(z,t) = \mathrm{Im}(\sqrt{2}\underline{U}(z)e^{j\omega t})$.

a) $i(z,t) = 4\sqrt{2}\sin(100\pi t + 2\pi z + \pi)$ $[A]$, undă inversă

b) $u(z,t) = 10\sin(200\pi t - 10\pi z)$ $[V]$, undă directă

Soluția 4.
Pentru a stabili dacă adoptăm modelul liniilor lungi, comparăm lungimea liniei l cu lungimea de undă λ a undei ce se stabilește pe linie. În general, dacă $\frac{l}{\lambda} \gtrsim 0,01$ fenomenele asociate undelor pot deveni importante.

Drept urmare, pentru linia bifilară constatăm că lungimea de undă este de o mie de ori mai mare decât lungimea liniei. Astfel $\frac{l}{\lambda} = 0,001 < 0,01$; deci, linia nu e lungă. În schimb, în cazul liniei microstrip obținem $\frac{l}{\lambda} = 10 \gg 0,01$; deci, aceasta este lungă.

Este de remarcat că, deși linia bifilară este mult mai lungă decât linia microstrip, doar pentru aceasta din urmă adoptăm modelul de linie lungă, criteriul după care ne ghidăm nefiind lungimea propriu-zisă a liniei ci *lungimea acesteia în raport cu lungimea de undă*!

Soluția 5.
$R' + j\omega L' \approx 4 \cdot 10^{-3} + 1,885$ $[\Omega]$, $G' + j\omega C' \approx 0,45 \cdot 10^{-6} + 1,0053 \cdot 10^{-3}$ $[S]$;
$\underline{\gamma} \approx 55,93 \cdot 10^{-6} + 0,043j$ $[1/m]$, $\underline{Z}_0 \approx 43,3 - 0,03j$ $[\Omega]$.

Soluția 6.
$\underline{Z}_0 = 75\ \Omega$. **Indiciu:** Se pornește de la expresiile în complex ale undelor de tensiune și curent

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_0^+ e^{-\underline{\gamma} z} + \underline{U}_0^- e^{\underline{\gamma} z} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}(z) &= \underline{I}_0^+ e^{-\underline{\gamma} z} + \underline{I}_0^- e^{\underline{\gamma} z} && (2)\\ &= \frac{\underline{U}_0^+}{\underline{Z}_0} e^{-\underline{\gamma} z} - \frac{\underline{U}_0^-}{\underline{Z}_0} e^{\underline{\gamma} z} && (3) \end{aligned}$$

unde $\underline{U}_0^+$, $\underline{U}_0^-$, $\underline{I}_0^+$ și $\underline{I}_0^-$ sunt constante.

Soluția 7.
Indiciu: Se pornește de la expresiile în complex ale undelor de tensiune și curent (1), (3) (vezi seminarul).

$$\underline{U}(z) = 200 e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j200\pi z}\ [\mu V]$$
$$\underline{I}(z) = 4 e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j200\pi z}\ [\mu A]$$