TEMĂ
Trigonometrie, numere complexe, circuite de curent alternativ

George Marian Vasilescu

26 Feb. 2016

Exercițiul 1. Să se transforme din radiani în grade și viceversa:[1]
a) $\pi/6[rad]$; b) $\pi[rad]$; c) $20\pi[rad]$; d) $4,593[rad]$; e) $-45°$

Exercițiul 2. Să se calculeze $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\mathrm{tg}(\alpha)$ și să se reprezinte pe cercul trigonometric:
a) $\alpha = -\pi/4$; b) $\alpha = 3\pi/4$; c) $\alpha = 540°$; d) $\alpha = -90°$

Exercițiul 3. Să se calculeze partea reală, partea imaginară, modulul și argumentul pentru numerele complexe. Care sunt formele lor polare și carteziene?

a) j^3; $(1-j)^2$; $(1+j)(1-j)$; $j(1-j)$

b) $\frac{4}{j} + e^{-j\pi/2}$; $\frac{1+j}{1-j} + \frac{2+2j}{1+j}$

c) $\frac{j}{3+3j} \cdot 12 + e^{j90°} + j\frac{8}{-2+2j}$

Exercițiul 4. Să se reprezinte în planul complex numerele:

a) $\underline{z}_1 = 2$; $\underline{z}_2 = 2j$; $\underline{z}_3 = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$

b) $\underline{z}_1 = e^{j\frac{\pi}{2}}$; $\underline{z}_2 = -1$; $\underline{z}_3 = \underline{z}_1 - \underline{z}_2$

Ce valoare are întotdeauna modulul unui număr complex de forma $e^{j\varphi}$?

c) $\underline{z}_1 = 1 + j$; $\underline{z}_2 = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \underline{z}_1$

Ce corespunde din punct de vedere geometric, în planul complex, înmulțirii unui număr complex cu un alt un număr complex de forma $e^{j\varphi}$ (cu $\varphi > 0$)? Dar cu unul de forma $e^{-j\varphi}$?

d) $\underline{z}_1 = 1 + j$; $\underline{z}_2 = 3\underline{z}_1$

Ce corespunde din punct de vedere geometric, în planul complex, înmulțirii unui număr complex cu un număr real a?

Exercițiul 5. În figura 5 este reprezentată variația sinusoidală în timp a unei tensiuni. Se cere:

a) Amplitudinea $\hat{U}$, valoarea efectivă U, pulsația ω, frecvența f, perioada T, faza inițială φ și faza $\phi(t)$.

b) Expresia tensiunii $u(t)$

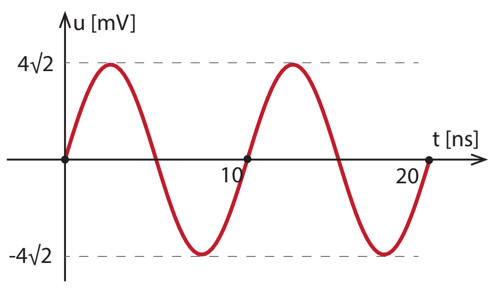

Figura 1: Variația în timp a tensiunii electrice $u(t)$.

[1] Pentru deducerea formulei se poate aplica regula de trei-simplu: unui unghi de 2π îi corespunde $360°$...

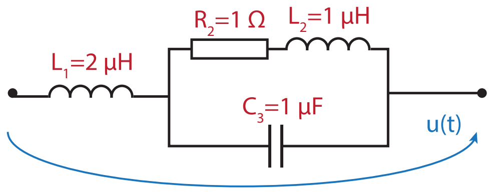

Figura 2: Un circuit de curent alternativ

Exercițiul 6. Pe circuitul din figura 2 se aplică tensiunea $u(t) = 4\sqrt{2}\sin \omega t$ $[V]$ având frecvența $f = \frac{1}{2\pi}$ MHz. Se cere:

a) Să se echivaleze dipolul cu o singură impedanță complexă $\underline{Z}_e$. Să se calculeze: impedanța complexă $\underline{Z}_e$, rezistența de curent alternativ R_e, reactanța X_e, impedanța $|\underline{Z}_e|$, admitanța complexă $\underline{Y}_e$, conductanța de curent alternativ G_e, susceptanța B_e și admitanța $|\underline{Y}_e|$ folosind relațiile

$$\underline{Z} = R + jX \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jB$$

b) Să calculeze, în complex, curenții $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$

c) De câte ori este mai mare tensiunea u față de curentul i_1 și care este defazajul dintre acestea? **Indicu**: facem raportul $\underline{U}/\underline{I}_1$; acesta este chiar impedanța complexă $\underline{Z}_e$; modulul și argumentul acesteia ne oferă informația dorită.

d) De câte ori este mai mare tensiunea u față de u_1 și care este defazajul dintre acestea? **Indicu**: procedăm similar cazului anterior și calculăm raportul $\underline{U}/\underline{U}_1$; mai este acesta egal cu impedanța complexă?

e) Să se determine $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ și $u_1(t)$ și să se verifice dacă rezultatele obținute la subpunctele anterioare sunt corecte.

Exercițiul 7. (*Opțional*) Care sunt impedanțele *complexe* $\underline{Z}_R$, $\underline{Z}_L$, $\underline{Z}_C$ pentru rezistor, bobină și condensator? Cum variază cu frecvența impedanțele $|\underline{Z}_R|$, $|\underline{Z}_C|$, $|\underline{Z}_L|$? Trasați graficul impedanță funcție de frecvență pentru niște valori oarecare R, L, C.

Soluții și indicii

Soluția 3.
c) $\text{Re}\{\underline{z}\} = 4$; $\text{Im}\{\underline{z}\} = 1$;

Soluția 5.
a) $f = 100$ MHz, $\varphi = 0$ rad

Soluția 6.
$\underline{Z}_1 = 2j$, $\underline{Z}_2 = 1 + j$, $\underline{Z}_3 = -j$, $\underline{Z}_{123} = 1 + j$, $\underline{Y}_1 = \frac{-j}{2}$, $\underline{Y}_2 = \frac{1}{2}(1 - j)$, $\underline{Y}_3 = j$, $\underline{Y}_{123} = \frac{1}{2}(1 - j)$

$i_1(t) = 4\sin(10^6 t - \pi/4)$ $[A]$, $i_2(t) = 8\sin(10^6 t + 5\pi/4)$ $[A]$, $i_3(t) = 4\sqrt{2}\sin(10^6 t)$ $[A]$,