Sisteme cu microunde

Curs #2: Oscilații și unde

George Marian Vasilescu

Facultatea de Inginerie Electrică, Universitatea Politehnica din București

24 Feb. 2018

Cuprins

Cuprins

Oscilații

Definiție

Oscilația este variația periodică în timp a unei mărimi $x(t)$.

$$x(t) = x(t + T) \quad \text{unde } T \text{ este perioada.}$$

Oscilații

Definiție

Oscilația este variația periodică în timp a unei mărimi $x(t)$.

$$x(t) = x(t+T) \quad \text{unde } T \text{ este perioada.}$$

Exemple de oscilații

Mișcarea Pământului în jurul Soarelui, bătăile inimii, mișcarea unui pendul, etc.

Oscilații

Definiție

Oscilația este variația periodică în timp a unei mărimi $x(t)$.

$$x(t) = x(t+T) \quad \text{unde } T \text{ este perioada.}$$

Exemple de oscilații

Mișcarea Pământului în jurul Soarelui, bătăile inimii, mișcarea unui pendul, etc.

Alte exemple de oscilații

Una foarte importantă:

Oscilații

Definiție

Oscilația este variația periodică în timp a unei mărimi $x(t)$.

$$x(t) = x(t+T) \quad \text{unde } T \text{ este perioada.}$$

Exemple de oscilații

Mișcarea Pământului în jurul Soarelui, bătăile inimii, mișcarea unui pendul, etc.

Alte exemple de oscilații

Una foarte importantă: $u(t)$, $i(t)$ din circuitele de curent alternativ sunt mărimi periodice sinusoidale.

Câteva clasificări

Tipuri de oscilații

- Oscilații neamortizate – amplitudinea este constantă în timp
- Oscilații amortizate – amplitudinea scade în timp

Câteva clasificări

Tipuri de oscilații

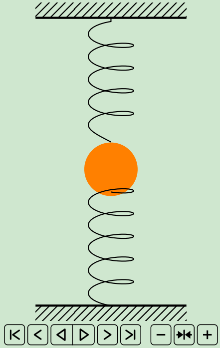
- Oscilații neamortizate – amplitudinea este constantă în timp
- Oscilații amortizate – amplitudinea scade în timp

Există în natură oscilații libere neamortizate?

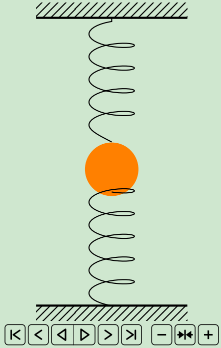
- Nu există.
- În practică apar mereu pierderi (datorate frecărilor, rezistențelor în circuit, etc.).
- Datorită acestor pierderi oscilațiile se vor amortiza în timp.

Exemplu: oscilații mecanice

Oscilator mecanic neamortizat

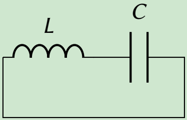


Oscilator mecanic amortizat

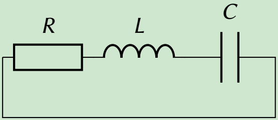


Exemplu: Oscilații în circuitele electrice

Circuitul LC e un oscilator neamortizat



Circuitul RLC e un oscilator amortizat



Elementele de circuit nedisipative

- Rezistorul disipă energie sub formă de căldură
- Bobina și condensatorul nu disipă energie
- Acestea doar o stochează și apoi o dau înapoi în circuit

Oscilația sinusoidală

Ce este oscilația sinusoidală?

- Se mai numește și oscilație armonică (sau pe scurt: armonică sau sinusoidă).
- Are expresia de forma

$$x(t) = X\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) = \hat{X}\sin\Phi(t)$$

- Este exact expresia pe care ați utilizat-o la Teoria Circuitelor Electrice, unde $x(t)$ era de obicei o tensiune sau un curent.

Alte observații

- Mai sunt și alte tipuri de oscilații. Puteți da exemplu?
- În cadrul acestui curs veți studia numai oscilații sinusoidale (numite și armonice).

Valorile ce descriu sinusoidele

$$x(t) = X\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) = \hat{X}\sin\Phi(t)$$

Termenii expresiei $x(t)$

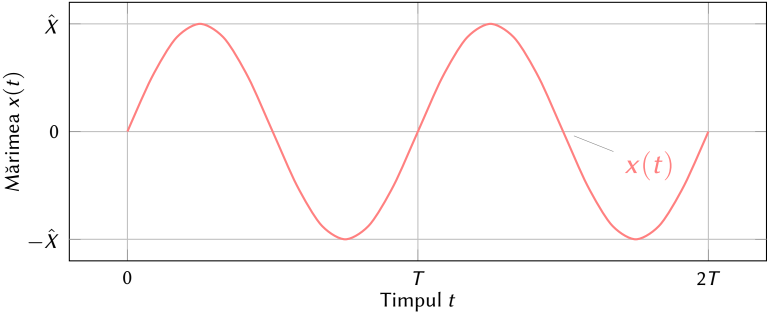
- t – timpul,
- $x(t)$ – mărimea ce oscilează (tensiune, curent, poziție, etc),
- X – valoarea efectivă,
- $\hat{X} = X\sqrt{2}$ – amplitudinea,
- ω – pulsația,

Termenii expresiei $x(t)$

- $\omega = 2\pi f$, unde f este frecvența,
- $f = 1/T$, unde T este perioada,
- $\Phi(t)$ – faza,
- $\varphi = \Phi(t = 0)$ – faza inițială.

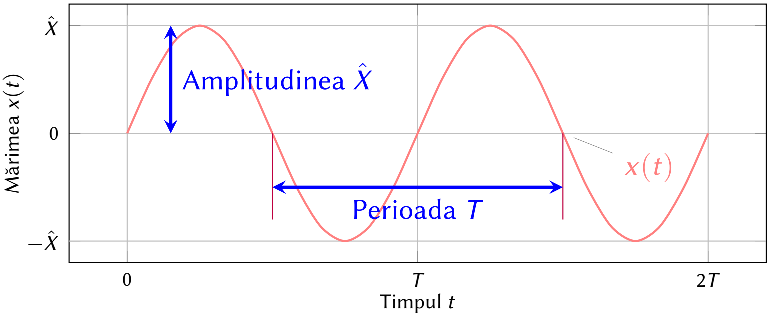
Valorile ce descriu sinusoidele

$$x(t) = X\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) = \hat{X}\sin\Phi(t)$$



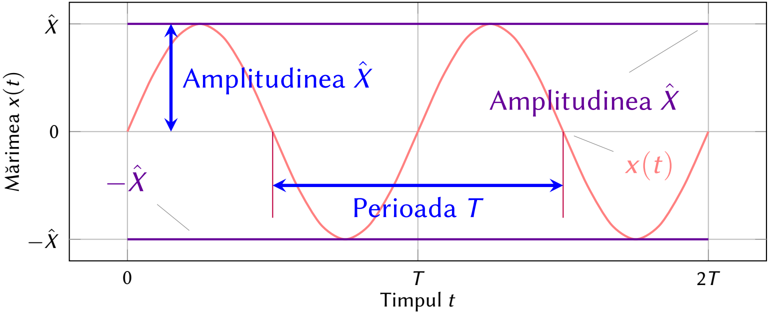
Valorile ce descriu sinusoidele

$$x(t) = X\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) = \hat{X}\sin\Phi(t)$$



Valorile ce descriu sinusoidele

$$x(t) = X\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) = \hat{X}\sin\Phi(t)$$



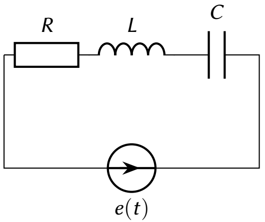
Oscilațiile forțate

Ce putem face să menținem amplitudinea oscilațiilor?

Oscilațiile forțate

Ce putem face să menținem amplitudinea oscilațiilor?

- Introducem energie din afara sistemului.
- De exemplu: mișcăm pendulul, sau introducem surse în circuit.
- Spunem că în acest caz oscilațiile sunt **forțate**.

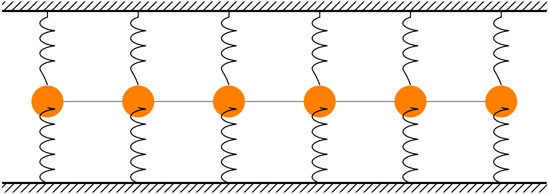


Pulsația este impusă de sursă

- Pulsația în acest caz este impusă de sursa de tensiune sinusoidală $e(t)$.
- În cazul oscilațiilor libere aceasta depindea de L și C.

Cuprins

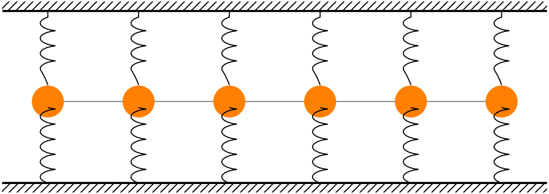
Oscilatori cuplați



Ce se întâmplă dacă conectăm între ei mai mulți oscilatori?

- Constatăm că perturbațiile de la un capăt vor apărea la celălalt capăt *după un timp*.
- Este ca și cum perturbațiile s-ar deplasa de-a lungul sistemului.
- Dacă sistemul are pierderi atunci perturbațiile se vor amortiza.
- Dacă nu, acestea vor ajunge la capăt nealterate.

Oscilatori cuplați



Cum ajungem în cazul undelor studiate în acest curs?

- Apropriem oscilatorii unii de alții din ce în ce mai mult.
- Sistemul devine continuu (și nu discret cum era înainte).
- Intrăm în „teritoriul undelor”.

Cum „arată” o undă progresivă

Definiție informală

Unda progresivă este o „perturbație” ce se deplasează prin spațiu.

Exemple

Undele mecanice de pe o coardă întinsă, valurile de pe un lac, undele acustice, undele electromagnetice, etc.

Unde liniare

Definiție

O undă este liniară dacă ecuația ce o descrie este liniară.

Proprietăți ale undelor liniare

- Pentru undele liniare putem aplica principiului superpoziției (Liniaritatea acestora face acest lucru posibil).
- Drept urmare, undele liniare nu afectează trecerea altor unde liniare prin ele.

Exemple de unde liniare

Undele acustice, undele electromagnetice.

În acest curs veți studia numai unde liniare.

Unde tranzitorii și unde periodice

În funcție de natura perturbațiilor ce le-a produs undele progresive pot fi clasificate în:

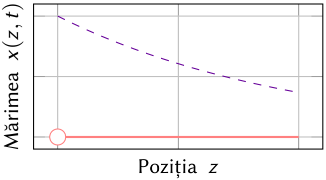
Unde tranzitorii

Sunt cauzate de perturbații bruște.

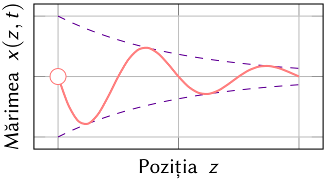
Unde periodice

Sunt cauzate de oscilații armonice forțate.

Undă tranzitorie amortizată



Undă armonică amortizată



Undele armonice (numite și sinusoidale) sunt unde periodice.

Dimensiunile undelor

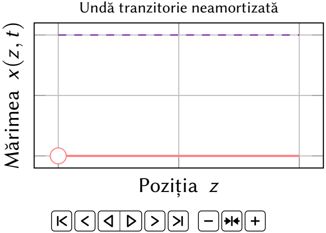
În funcție de numărul de variabile independente (altele decât timpul) undele progresive pot fi clasificate în:

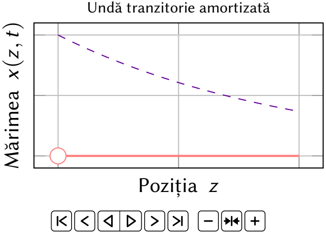
- Unde unidimensionale (1D); ex.: unda mecanică de pe o coardă întinsă.
- Unde bidimensionale (2D); ex.: valurile de pe suprafața unui lac.
- Unde tridimensionale (3D); ex.: undele acustice, undele electromagnetice.

Unde amortizate și unde neamortizate

În funcție de variația amplitudinii în spațiu, undele pot fi clasificate în:

- Unde neamortizate – amplitudinea nu depinde de poziție,
- Unde amortizate – amplitudinea se diminuează pe măsură ce unda înaintează.

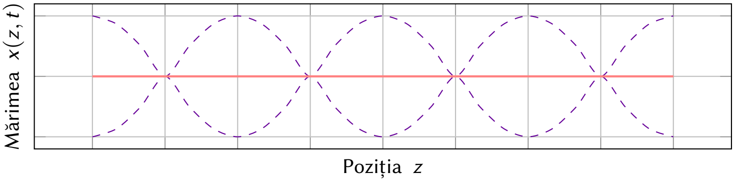




Unde staționare

- Până acum am discutat numai despre undele progresive.
- Există însă și unde staționare.

Undă staționară



Unde progresive și unde staționare

Informal putem spune că:

- undele progresive „călătoresc” de-a lungul mediului,
- undele staționare „stau” în mediu.

Exemple

Undele ce se stabilesc pe coarda de la chitară.

Vom analiza undele staționare mai în profunzime la cursurile următoare.

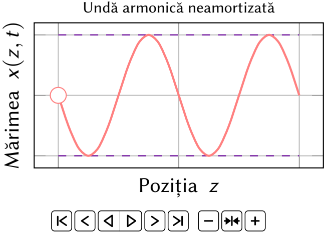
Care este cauza amortizării undelor armonice?

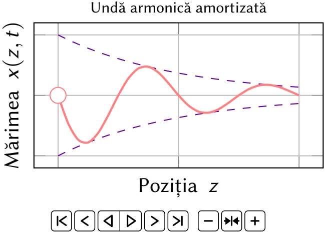
Atunci când o undă se propagă printr-un mediu cu pierderi, aceasta pierde o parte din energia pe care o transportă.

Exemple de atenuări

- Unda mecanică pe o coadă vibrantă se va atenua datorită micilor forțe de frecare ce apar de-a lungul acesteia. Energia mecanică se va transforma ireversibil în căldură.
- Dar unda electromagnetică ce se propagă printr-un cablu coaxial de ce s-ar atenua?

Undele armonice amortizate și neamortizate

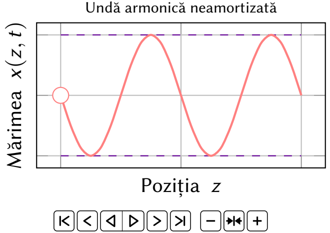




Undele armonice amortizate și neamortizate

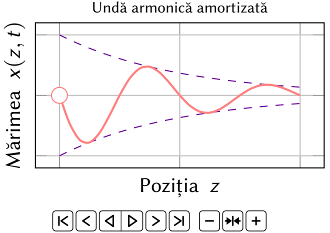
Undele neamortizate

Apar în medii fără pierderi.



Undele amortizate

Apar în medii cu pierderi.



Ce expresii au undele armonice?

Undele neamortizate

$$\begin{aligned} x(z,t) &= X\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta z + \varphi) \\ &= \hat{X}\sin\Phi(z,t) \end{aligned}$$

Undele amortizate

$$\begin{aligned} x(z,t) &= X e^{-\alpha z}\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta z + \varphi) \\ &= \hat{X} e^{-\alpha z}\sin\Phi(z,t) \end{aligned}$$

- Indiferent de natura lor (mecanice, electromagnetice, etc.) undele armonice unidimensionale pot fi descrise d.p.d.v. matematic la fel, folosindu-se expresiile de mai sus.
- Expresiile anterioare seamănă cu cele pe care le cunoașteți de la circuitele de c.a.
- Pentru a se putea descrie variația *în spațiu* a undelor se introduc termenii marcați cu albastru.

Ce expresii au undele armonice?

Undele neamortizate

$$x(z,t) = X\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta z + \varphi) = \hat{X}\sin\Phi(z,t)$$

Undele amortizate

$$x(z,t) = X e^{-\alpha z}\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta z + \varphi) = \hat{X} e^{-\alpha z}\sin\Phi(z,t)$$

Pe câteva din mărimile din expresiile undelor le cunoaștem de la Teoria Circuitelor Electrice.

Ce expresii au undele armonice?

Undele neamortizate

$$x(z,t) = X\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta z + \varphi) = \hat{X}\sin\Phi(z,t)$$

Undele amortizate

$$x(z,t) = X e^{-\alpha z}\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta z + \varphi) = \hat{X} e^{-\alpha z}\sin\Phi(z,t)$$

- Amplitudinea e dată de expresia din fața lui $\sin$.
- Valoarea efectivă e dată de expresia din fața lui $\sqrt{2}$.

Undele neamortizate

- X – valoarea efectivă,
- $X\sqrt{2}$ – amplitudinea,

Undele amortizate

- $X e^{-\alpha z}$ – valoarea efectivă,
- $X e^{-\alpha z}\sqrt{2}$ – amplitudinea,

Ce expresii au undele armonice?

Undele neamortizate

$$x(z,t) = X\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta z + \varphi)$$
$$= \hat{X}\sin\Phi(z,t)$$

Undele amortizate

$$x(z,t) = Xe^{-\alpha z}\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta z + \varphi)$$
$$= \hat{X}e^{-\alpha z}\sin\Phi(z,t)$$

Termenii expresiilor $x(z,t)$

- t – timpul, z – poziția,
- x – mărimea ce oscilează (tensiune, curent, poziția pe verticală, etc.),
- $\Phi(z,t)$ – faza. Depinde și de timpul t, dar și de poziția z,
- $-\beta z + \varphi = \Phi(z, t = 0)$ – faza inițială. Atenție la expresie!
- $\varphi = \Phi(z = 0, t = 0)$ – faza de referință,

Ce expresii au undele armonice?

Undele neamortizate

$$x(z,t) = X\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta z + \varphi) = \hat{X}\sin\Phi(z,t)$$

Undele amortizate

$$x(z,t) = X e^{-\alpha z}\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta z + \varphi) = \hat{X} e^{-\alpha z}\sin\Phi(z,t)$$

Termenii expresiilor $x(z,t)$

- $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ – pulsația $\left[\frac{rad}{s}\right]$,
- T este perioada $[s]$, iar $f = 1/T$ este frecvența $[Hz]$,
- α – Constanta de atenuare $\left[\frac{Np}{m}\right]$ [„Nepper pe metru”],
- $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ – constanta de fază $\left[\frac{rad}{m}\right]$,
- λ – lungimea de undă $[m]$.

Ce expresii au undele armonice?

Observăm o similitudine între anumiți termeni.

- Pulsația seamănă cu constanta de fază.
- Perioada seamănă cu lungimea de undă.

Folosim acest lucru pentru a le reține mai ușor!

Mărimi „temporare”

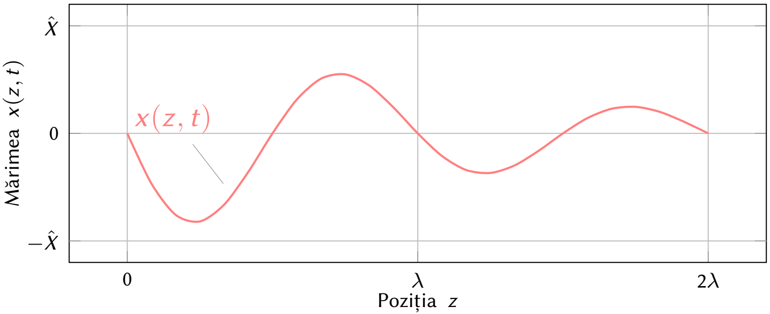
- ω – pulsația $\left[\frac{rad}{s}\right]$
- $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$
- T – perioada $[s]$

Mărimi „spațiale”

- β – constanta de fază $\left[\frac{rad}{m}\right]$
- $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$
- λ – lungimea de undă $[m]$

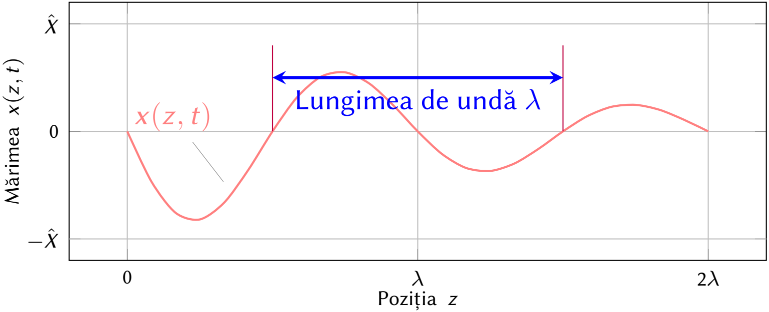
Valorile ce descriu undele armonice

$$x(z,t) = Xe^{-\alpha z}\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta z + \varphi) = \hat{X}e^{-\alpha z}\sin\Phi(z,t)$$



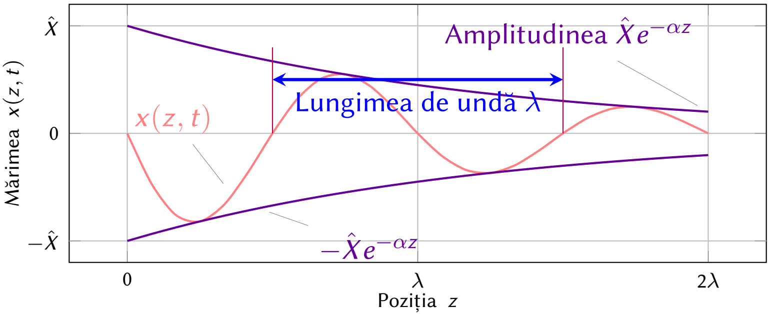
Valorile ce descriu undele armonice

$$x(z,t) = Xe^{-\alpha z}\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta z + \varphi) = \hat{X}e^{-\alpha z}\sin\Phi(z,t)$$



Valorile ce descriu undele armonice

$$x(z,t) = Xe^{-\alpha z}\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta z + \varphi) = \hat{X}e^{-\alpha z}\sin\Phi(z,t)$$



Ce expresii au undele armonice în complex?

Regulile transformării în complex în circuitele de c.a.

- Valoarea efectivă se asocia modulului numărului complex $|\underline{X}|$.
- Faza inițială se asocia argumentului numărului complex $\arg(\underline{X})$.

- Pentru a obține expresiile în complex ale undelor folosim transformata fazorială învățată la Teoria Circuitelor Electrice.
- Oricărei sinusoide $x(t)$ îi se asocia un număr complex $\underline{X}$ folosind cele două reguli de mai sus.

Ce expresii au undele armonice în complex?

Regulile transformării în complex în circuitele de c.a.

- Valoarea efectivă se asocia modulului numărului complex $|\underline{X}|$.
- Faza inițială se asocia argumentului numărului complex $\arg(\underline{X})$.

Folosind cele două reguli, expresiile undelor în complex devin:

Undele neamortizate

$$
\begin{aligned}
x(z,t) = X\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta z + \varphi) \rightleftharpoons \underline{X} &= Xe^{j(-\beta z + \varphi)} \\
&= Xe^{j\varphi}e^{-j\beta z} \\
&= \underline{X}_0 e^{-j\beta z}
\end{aligned}
$$

$$\text{unde} \quad \underline{X}_0 = Xe^{j\varphi}$$

Ce expresii au undele armonice în complex?

Regulile transformării în complex în circuitele de c.a.

- Valoarea efectivă se asocia modulului numărului complex $|\underline{X}|$.
- Faza inițială se asocia argumentului numărului complex $\arg(\underline{X})$.

Folosind cele două reguli, expresiile undelor în complex devin:

Undele amortizate

$$
\begin{aligned}
x(z,t) = Xe^{-\alpha z}\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta z + \varphi) \rightleftharpoons \underline{X} &= Xe^{-\alpha z}e^{j(-\beta z+\varphi)} \\
&= Xe^{j\varphi}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} \\
&= \underline{X}_0 e^{-(\alpha+j\beta)z} = \underline{X}_0 e^{-\underline{\gamma} z}
\end{aligned}
$$

unde $\underline{X}_0 = Xe^{j\varphi}$ și $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$

Ce expresii au undele armonice în complex?

Câteva observații

- În cazul oscilațiilor expresia în complex asociată acestora era un **număr** complex.
- În cazul undelor expresia în complex asociată acestora este o **funcție** complexă de variabilă z.
- Faza inițială în cazul undelor este $-\beta z + \varphi$ și nu φ ca în cazul oscilațiilor.
- Trecerea în complex în cazul undelor este **identică** cu cea de la circuitele de c.a. Trebuie doar să ținem cont de cele două reguli.

Semnificația constantei de atenuare α

- **Constanta de atenuare** α ne spune cât de mult se atenuează unda pe unitatea de lungime.
- Cu cât α este mai mare cu atât atenuarea undei va fi mai pronunțată.
- Ce valoare are α în cazul unei unde neamortizate?

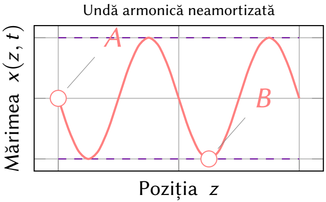
Semnificația constantei de atenuare α

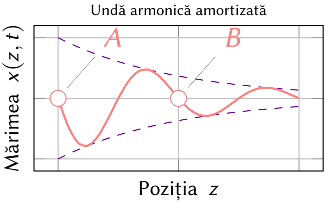
- **Constanta de atenuare** α ne spune cât de mult se atenuează unda pe unitatea de lungime.
- Cu cât α este mai mare cu atât atenuarea undei va fi mai pronunțată.
- Ce valoare are α în cazul unei unde neamortizate?
- $\alpha = 0$ în cazul unei unde neamortizate.

Semnificația lungimii de undă λ

- **Lungimea de undă** λ seamănă cu **perioada** T.
- Perioada T reprezintă *durata* de timp după care oscilația se repetă *în timp*.
- Lungimea de undă λ reprezintă *distanța* după care unda neamortizată se repetă în timp.

Legătura dintre oscilații și unde





- În cazul prezentat unda armonică este produsă de oscilația forțată de la capătul A din stânga.
- Aceea oscilație este transmisă de-a lungul coardei cu anumită viteză.
- Regăsim oscilația de la capătul stâng în orice poziție z după o durată de timp Δt.
- În particular aceasta apare și în punctul B.

Legătura dintre oscilații și unde

Drept urmare, analizând expresiile $x(z,t)$, putem concluziona că fiecare punct de pe coardă:

În cazul undelor neamortizate

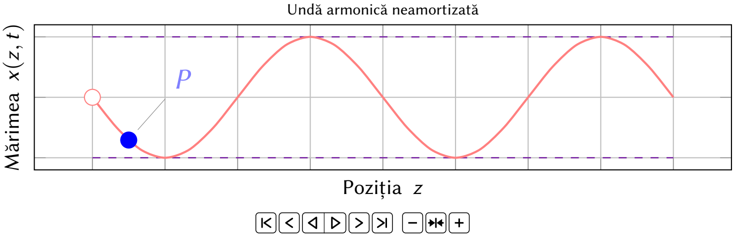
- oscilează cu aceiași pulsație ω.
- oscilează cu aceiași amplitudine.

În cazul undelor amortizate

- oscilează cu aceiași pulsație ω.
- oscilează cu amplitudini diferite $\hat{X}e^{-\alpha z}$ ce depind de poziția z.

Viteza de fază

- Viteza cu care „se deplasează oscilația” de-a lungul coardei este de fapt viteza de propagare a undei.
- Aceasta se numește **viteză de fază** și se notează cu v_f.



Viteza de fază

Poate fi interpretată și ca viteaza cu care se deplasează un punct de fază constantă, precum P.

$$\Phi(z,t) = \omega t - \beta z + \varphi$$

Derivăm ambii membri din ecuația anterioară și ținem cont că faza $\Phi(z,t)$ e constantă în timp.

$$\underbrace{\frac{d\Phi(z,t)}{dt}}_{0} = \omega - \beta \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{\text{viteza}} + 0 \implies \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

Viteza de fază are, deci, expresia

$$\boxed{v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad \left[\frac{m}{s}\right]}$$

Viteza de fază

Viteza de fază are, deci, expresia

$$\boxed{v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad [\frac{m}{s}]}$$

Viteza de fază

Viteza de fază are, deci, expresia

$$\boxed{v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad [\frac{m}{s}]}$$

Din relația anterioară cu cât se „deplasează unda” într-o perioadă T?

Viteza de fază

Viteza de fază are, deci, expresia

$$\boxed{v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad [\frac{m}{s}]}$$

Într-o perioadă T unda se „deplasează” pe o distanță egală cu λ.

Viteza de fază

Viteza de fază are, deci, expresia

$$\boxed{v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad [\frac{m}{s}]}$$

Observație

Viteza de fază v_f este viteza cu care profilul undei se deplasează pe axa Oz și nu viteza cu care punctele de pe coardă oscilează în direcția verticală.

Unde directe și inverse

- Toate undele progresive descrise anterior s-au propagat în sensul pozitiv al axei Oz.
- Spunem că acestea sunt **unde directe**.

Undele neamortizate directe

$$x(z,t) = X\sqrt{2}\sin(\omega - \beta z + \varphi)$$

Undele amortizate directe

$$x(z,t) = Xe^{-\alpha z}\sqrt{2}\sin(\omega t - \beta z + \varphi)$$

- **Undele inverse** se propagă în sensul negativ al axei Oz.
- Expresiile acestora se obțin înlocuind semnul „-” cu „+” în expresiile anterioare:

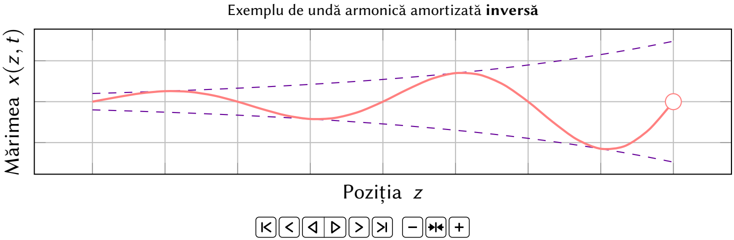
Undele neamortizate inverse

$$x(z,t) = X\sqrt{2}\sin(\omega + \beta z + \varphi)$$

Undele amortizate inverse

$$x(z,t) = Xe^{+\alpha z}\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta z + \varphi)$$

Undele inverse



Observații

- Unda se propagă în sensul negativ al axei *Oz*.
- Oscilația ce produce unda se află, evident, în capătul din dreapta.
- Amplitudinea e mai mică în capătul din stânga deoarece aceasta scade pe măsură ce unda se propagă *spre stânga*.