Diagrama Smith

O scurtă introducere

VASILESCU GEORGE MARIAN

Departamentul de Electrotehnică
Facultatea de Inginerie Electrică
Universitatea Politehnica din București

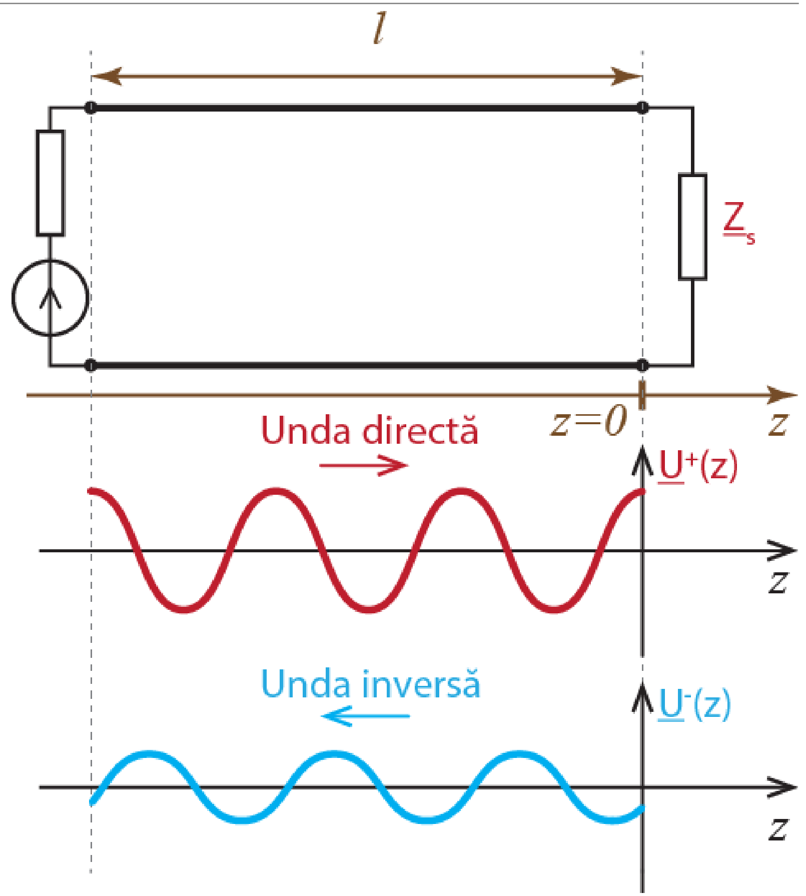
28.03.2017 (rev. 26.03.2019)

Ce este diagrama Smith?

- Este o unealtă ce ne permite să soluționăm grafic problemele de linii de transmisii
- Putem rezolva o gamă largă de probleme fără a utiliza foarte multe formule!
- Ne ajută să înțelegem mai bine (mai „intuitiv”) liniile de transmisie
- A fost descrisă inițial de de Phillip H. Smith în Ian. 1939
- Pare complicată, dar nu e nimic altceva decât un grafic mai „special”

O scurtă recapitulare

- Pe linia de transmisie undele se pot propaga în sensul pozitiv sau negativ al axei Oz;
- Le numim unde directe, respectiv inverse;
- Undele **directe** sunt create de generatorul din stânga și sunt **incidente** pe sarcină;
- Undele **inverse** sunt **reflectate** de sarcina din dreapta.



O scurtă recapitulare

Ecuațiile undelor pe o linie de transmisie fără pierderi (LTFP) sunt:

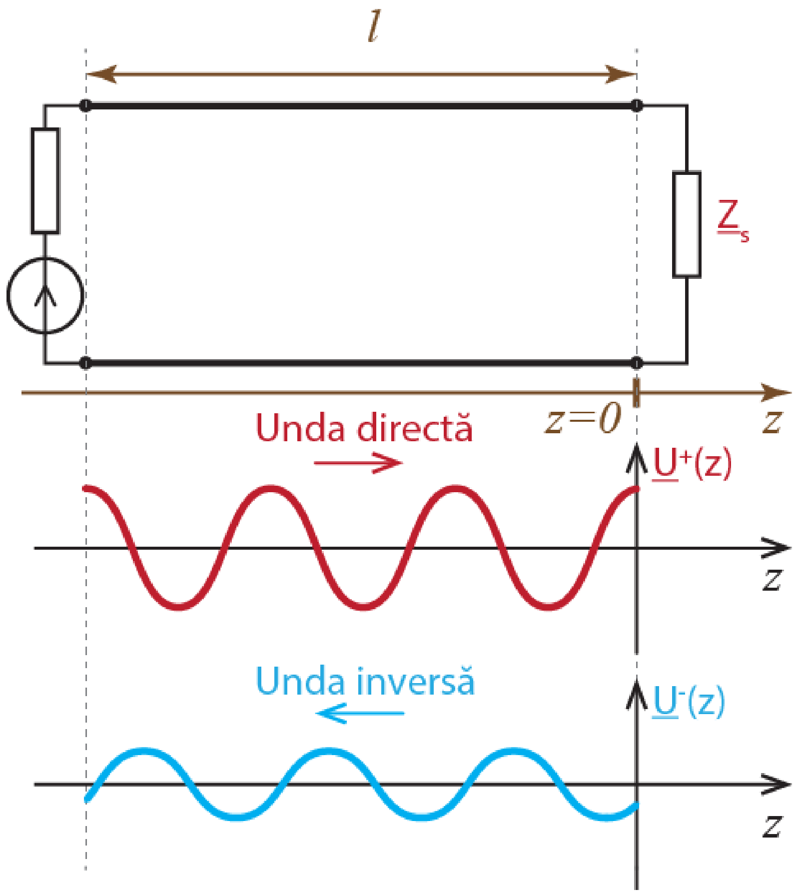
$$\underline{U}(z) = \boxed{\underline{U}^{+}(z)} + \boxed{\underline{U}^{-}(z)} = \underline{U}_0^{+}\left(e^{-j\beta z} + \underline{\Gamma} e^{j\beta z}\right)$$

$$\underline{I}(z) = \boxed{\underline{I}^{+}(z)} + \boxed{\underline{I}^{-}(z)} = \frac{\underline{U}_0^{+}}{\underline{Z}_0}\left(e^{-j\beta z} - \underline{\Gamma} e^{j\beta z}\right)$$

Undele directe

Undele inverse

z	Poziția	$\underline{Z}_0$	Impedanța caracteristică
$\underline{U}_0^{+}$	Constantă	β	Constanta de fază
		$\underline{\Gamma}$	Coeficientul de reflexie (al tensiunii)

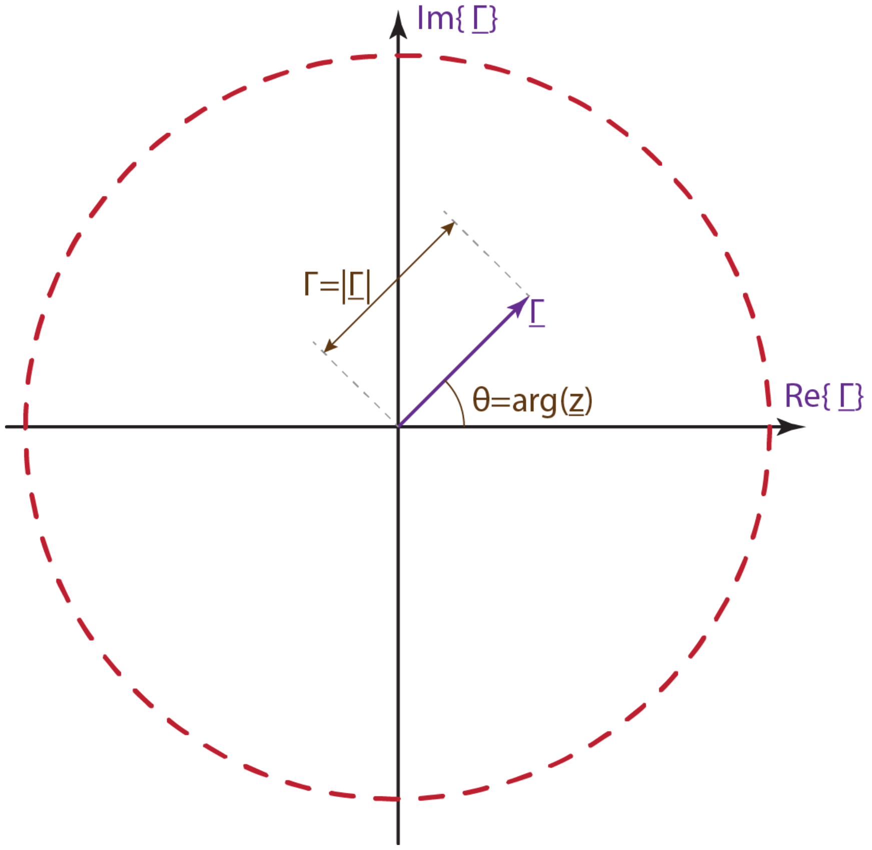


Dar ce reprezintă $\underline{\Gamma}$ mai exact?

- $\underline{\Gamma}$ este coeficientul de reflexie al tensiunii
- Este prin definiție raportul dintre tensiunea complexă reflectată și cea incidentă calculat în <u>poziția în care se află sarcina</u>!

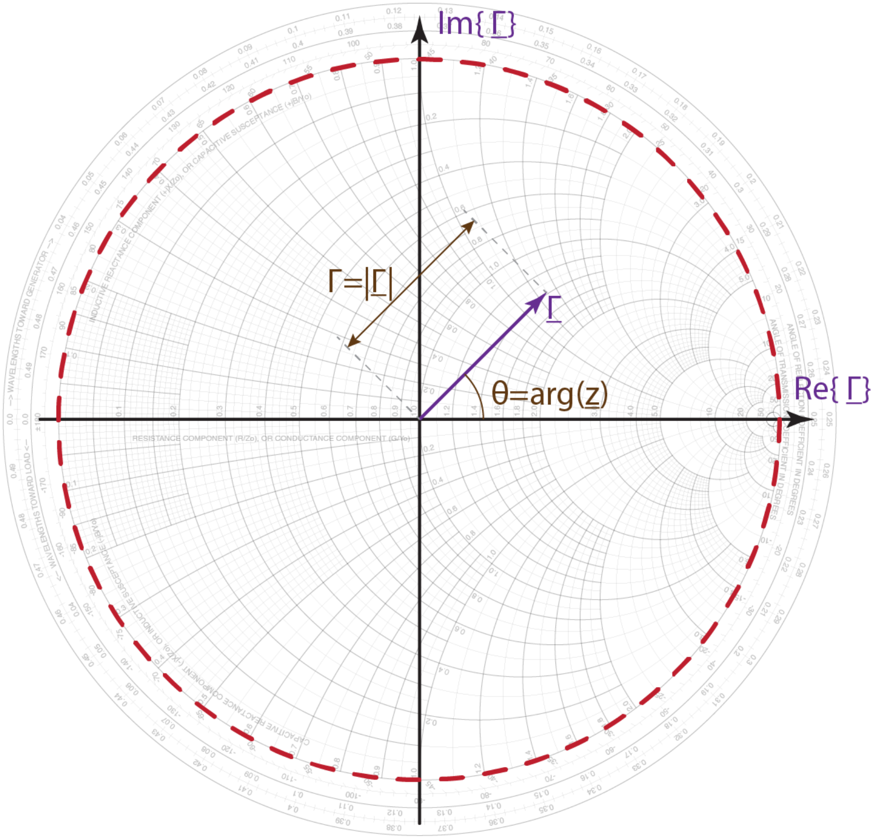
$$\underline{\Gamma} = \frac{\underline{U}^{-}(z=0)}{\underline{U}^{+}(z=0)}; \underline{\Gamma} = \Gamma e^{j\theta}$$

- Este un număr complex: are un modul $|\Gamma| = \Gamma$ și un argument $\arg(\underline{\Gamma}) = \theta$
- Ne spune ce procent „din unda” incidentă este reflectată ($\Gamma \times 100\%$) și cum sunt defazate cele două unde (cu θ).



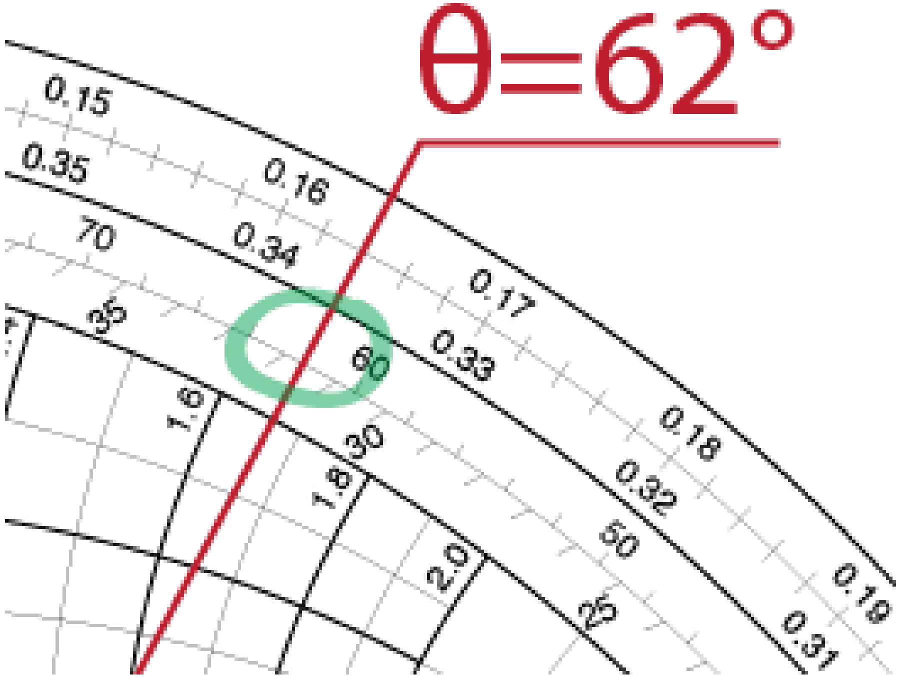
Legătura cu Diagrama Smith

- Pentru sarcini pasive (rezistoare, bobine, condensatoare) $\Gamma \leq 1$;
- Deci, pentru aceste cazuri, vectorul $\underline{\Gamma}$ din figură nu poate ieși în afara cercului de rază 1.
- Întrebare: ce legătură are $\underline{\Gamma}$ cu diagrama?
- Răspuns: diagrama este desenată chiar în planul complex $\underline{\Gamma}$.
- Întrebare: cum aflu ce valoare are numărul complex $\underline{\Gamma}$?
- Răspuns: Simplu; citesc în continuare!



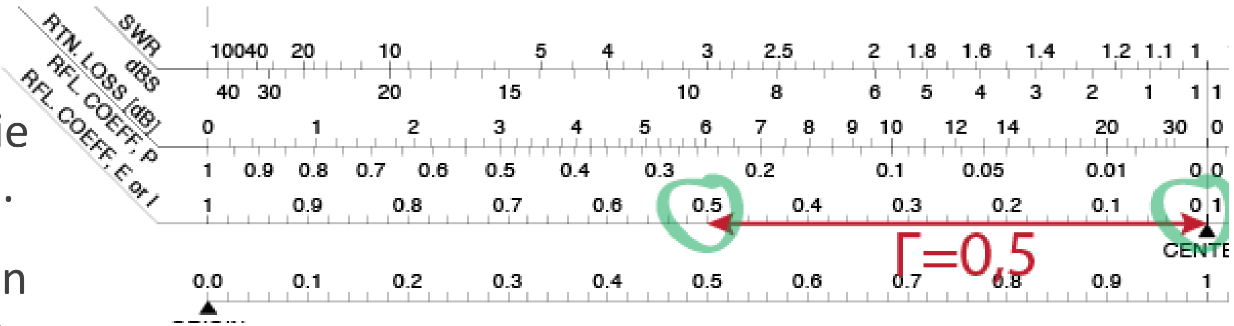
Exemplul 1. Să se reprezinte grafic $\underline{\Gamma}$

- Să se reprezinte $\underline{\Gamma} = 0{,}5e^{j62^\circ}$ pe diagramă!
- Avem două valori pe care trebuie să le identificăm pe desen: modulul $\Gamma = 0{,}5$ și argumentul $\theta = 62°$
- Citim argumentul de pe scala „Angle of reflection coefficient in degrees” și trasăm o linie subțire din centru diagramei către cota marcată.



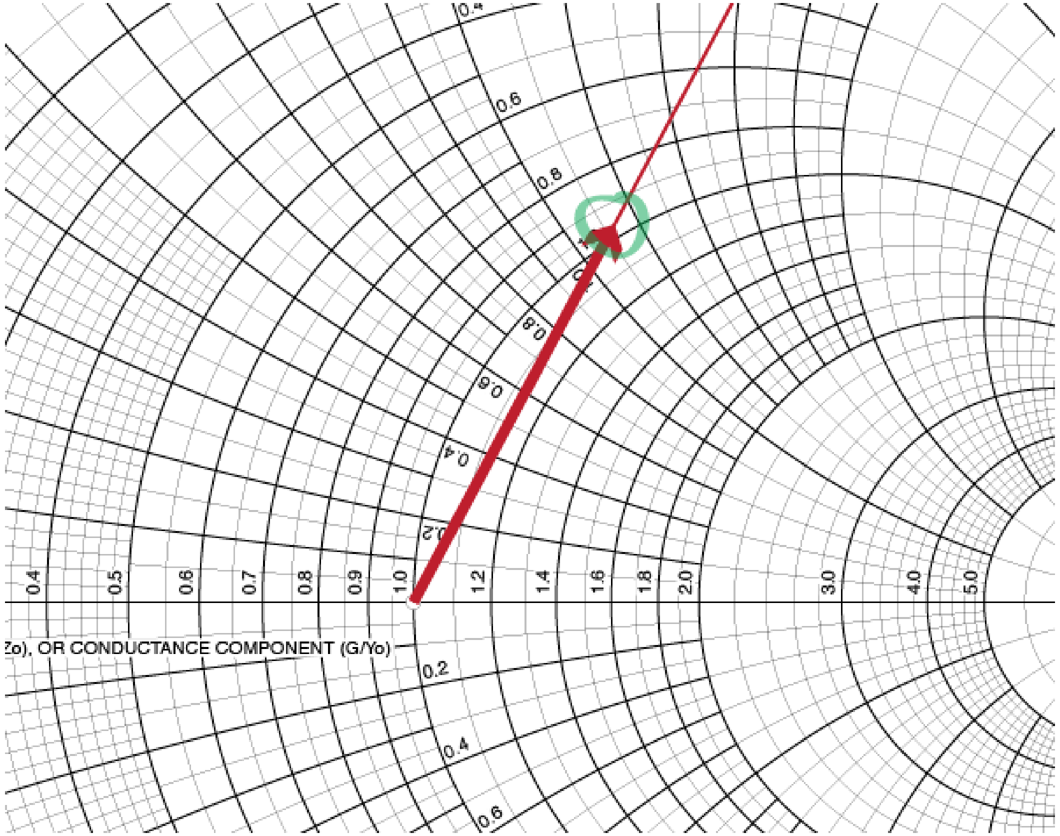
Exemplul 1. Să se reprezinte grafic $\underline{\Gamma}$

- Să se reprezinte $\underline{\Gamma} = 0{,}5e^{j62°}$ pe diagramă!
- Avem două valori pe care trebuie să le identificăm pe desen: modulul $\Gamma = 0{,}5$ și argumentul $\theta = 62°$
- Citim argumentul de pe scala „Angle of reflection coefficient in degrees” și trasăm o linie subțire din centru diagramei către cota marcată.
- Citim modulul de pe scala „Refl. Coef. E or I” din josul paginii. Îl preluăm cu compasul și îl mutăm pe linia subțire anterioară.



Exemplul 1. Să se reprezinte grafic $\underline{\Gamma}$

- Să se reprezinte $\underline{\Gamma} = 0{,}5e^{j62^\circ}$ pe diagramă!
- Avem două valori pe care trebuie să le identificăm pe desen: modulul $\Gamma = 0{,}5$ și argumentul $\theta = 62^\circ$
- Citim argumentul de pe scala „Angle of reflection coefficient in degrees” și trasăm o linie subțire din centru diagramei către cota marcată.
- Citim modulul de pe scala „Refl. Coef. E or I” din josul paginii. Îl preluăm cu compasul și îl mutăm pe linia subțire anterioară.
- Cu vârful compasului în centrul diagramei și creionul pe linia subțire marcăm „lungimea” coeficientului.



O scurtă recapitulare

Orice impedanță complexă $\underline{Z}$ poate fi scrisă ca:

$$\underline{Z} = R + jX$$

Rezistența de c.a.

Reactanța

Impedanța complexă normalizată $\underline{z}$ asociată lui $\underline{Z}$ se obține din raportul

$$\underline{z} = \underline{Z}/\underline{Z}_0 = \mathrm{r} + \mathrm{jx}$$

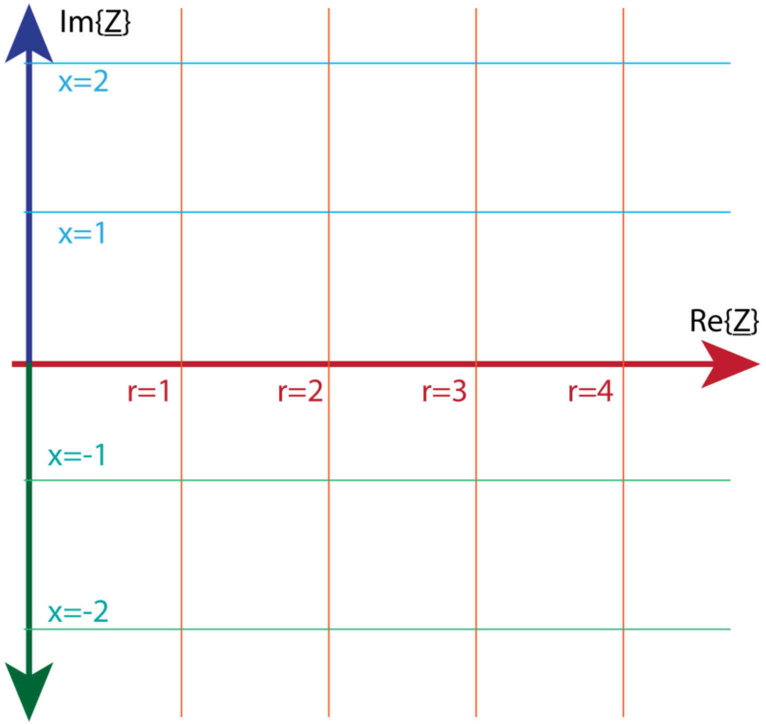
unde $\underline{Z}_0$ este impedanța caracteristică a linei cu care lucrăm.

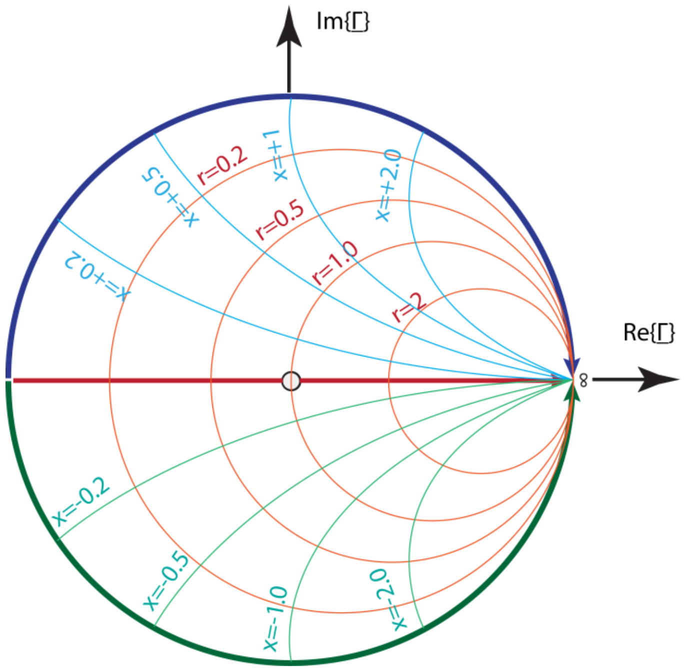
În acest caz, coeficientul de reflexie al tensiunii capătă forma

$$\underline{\Gamma} = \frac{\underline{Z}_S - \underline{Z}_0}{\underline{Z}_S + \underline{Z}_0} = \frac{\underline{z}_S - 1}{\underline{z}_S + 1}$$

Ce reprezintă curbele de pe diagramă?

- Curbele sunt, de fapt, cercuri.
- Ele reprezintă linii de coordonate și corespund transformării $\underline{z} = r + jx \rightsquigarrow \frac{\underline{z}-1}{\underline{z}+1}$





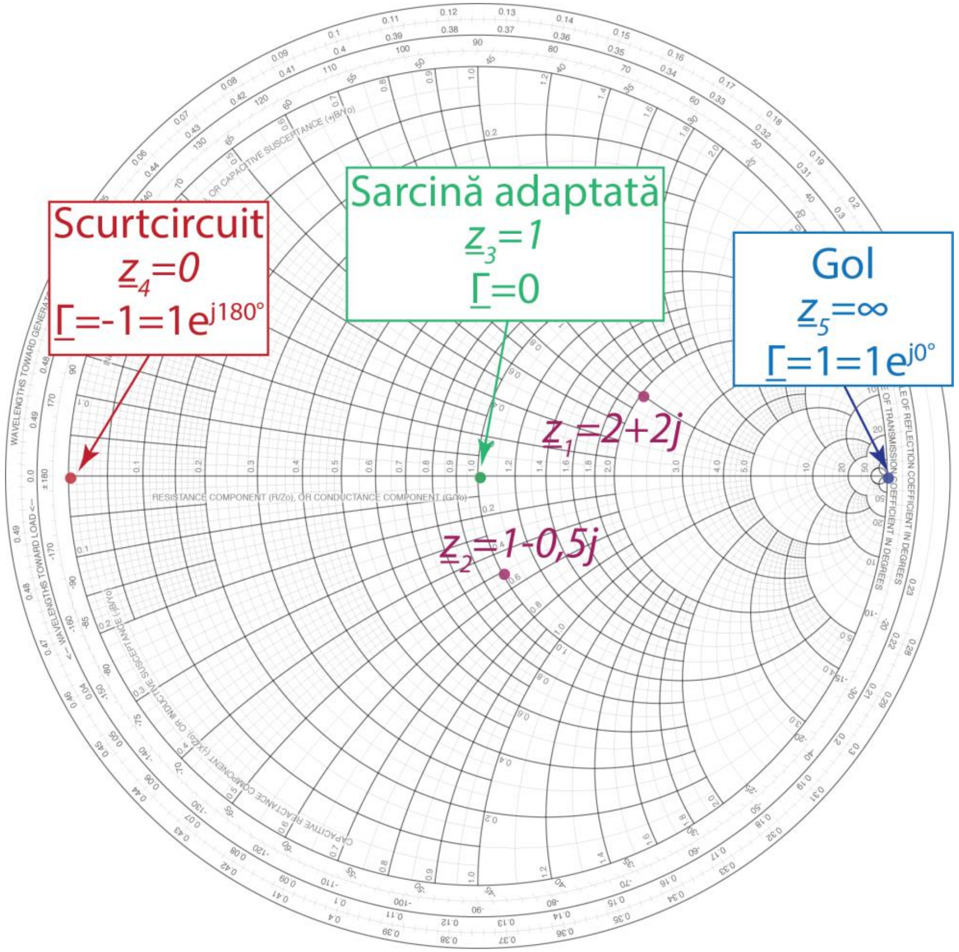
Exemplul 2.
Să se reprezinte impedanțele complexe

Să se reprezinte următoarele impedanțe de sarcină conectate la o LTFP de impedanță caracteristică Z_0=50Ω

- $\underline{Z}_1$=100+100j [Ω]⇒ $\underline{z}_1$=2+2j
- $\underline{Z}_2$=50-25j [Ω] ⇒ $\underline{z}_2$=1-0,5j

- $\underline{Z}_3$=Z_0 (impedanță adaptată)⇒ $\underline{z}_3$=1
- $\underline{Z}_4$=0 (scurtcircuit) ⇒ $\underline{z}_4$=0
- $\underline{Z}_5$=∞ (gol) ⇒ $\underline{z}_5$= ∞

În care din cazurile reprezentate pe diagramă nu apar reflexii? În ce cazuri reflexiile sunt totale?

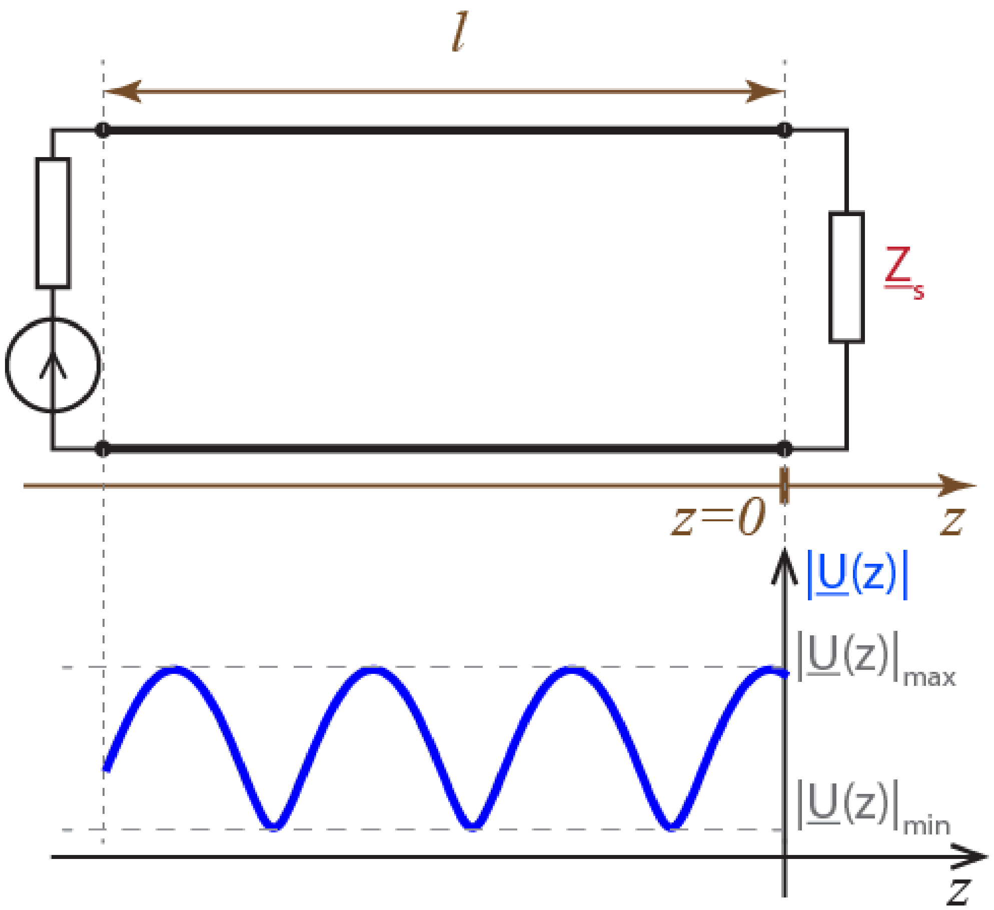


Cercurile de S-constant

- Atunci când pe o linie apar reflexii, valoarea efectivă a tensiunii (dar și a curentului) variază periodic de-a lungul acesteia.
- Raportul de undă staționară al tensiunii S (*eng.*: VSWR sau SWR) este, prin definiție, raportul dintre maximul valorii efective și minimul acesteia pe lina de transmisie:

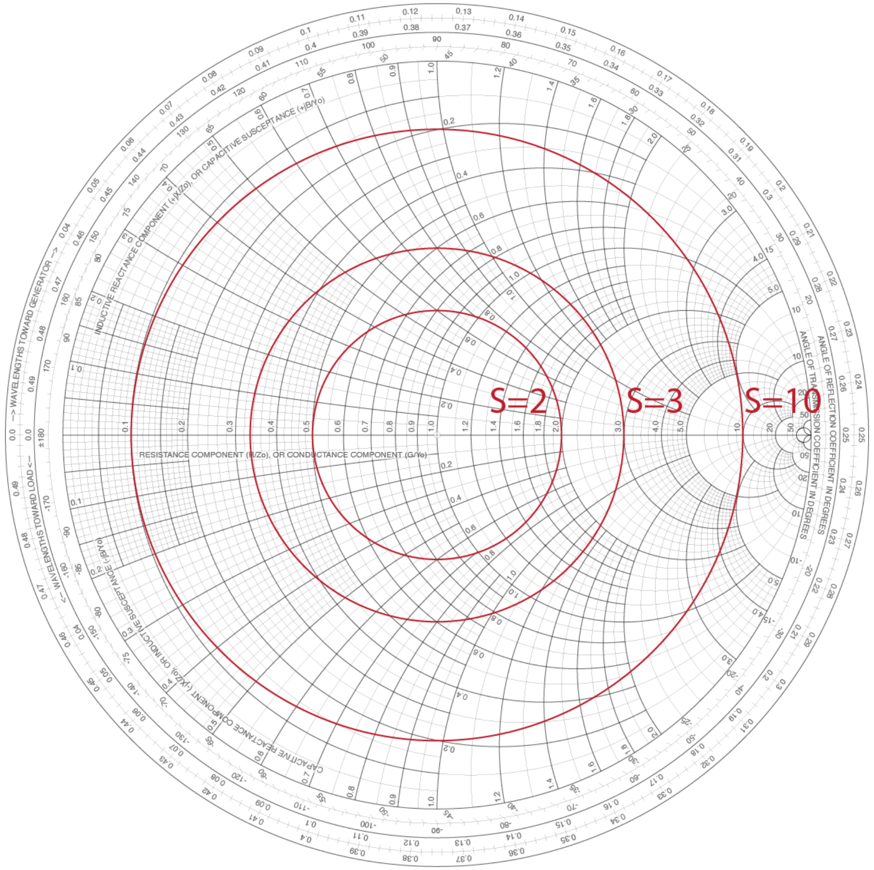
$$S = \frac{|\underline{U}|_{max}}{|\underline{U}|_{min}} \in [1, \infty]$$

- Pe linia fără pierderi undele nu se atenuează, deci raportul este același în orice punct de pe linie.



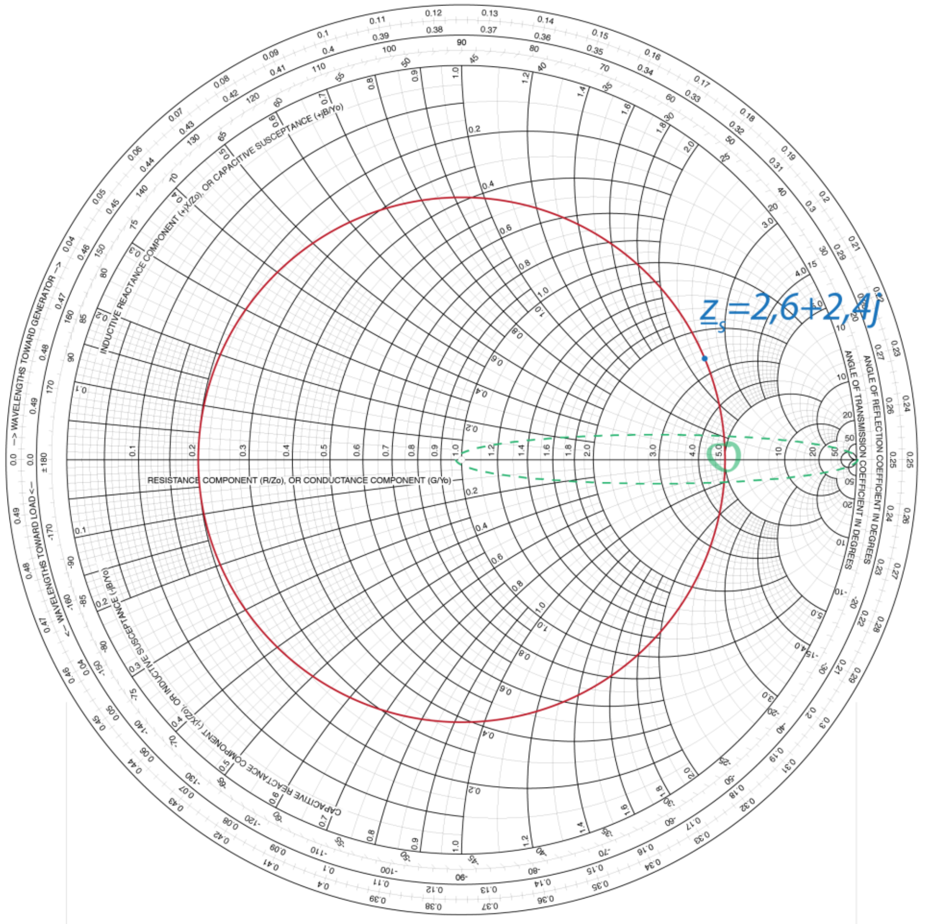
Cercurile de S-constant

- Fiecărei valori a lui S din domeniu $[1, \infty]$ i se poate asocia pe diagramă un cerc concentric cu diagrama.
- Cercul se desenează cu compasul în timpul soluționării problemei.
- Fiecărui punct de pe cerc îi corespunde aceeași valoare a parametrului S.
- Ce altă valoare mai putem asocia fiecărui cerc?



Exemplul 3.
Să se reprezinte cercul de S-constant

- La capătul unei LTFP de 50 Ω este conectată o sarcină de impedanță complexă $\underline{Z}_s = 130 + 120j$ [Ω]. Folosind diagrama Smith, să se determine și să se reprezinte grafic raportul de undă staționară S.
- Calculăm impedanța normalizată $\underline{z}_s = \underline{Z}_s/\underline{Z}_0 = 2{,}6 + 2{,}4j$
- Desenăm cercul cu centrul în mijlocul diagramei și cu raza dată de $\underline{z}_s$



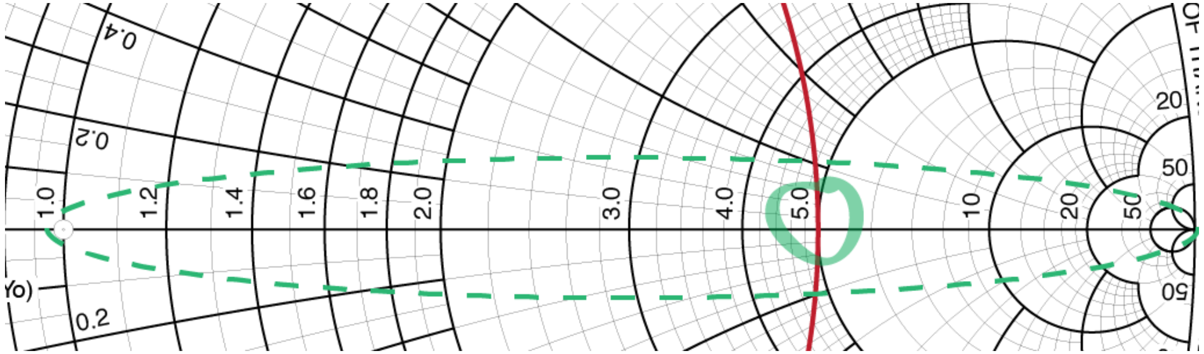
Exemplul 3.
Să se reprezinte cercul de S-constant

- La capătul unei LTFP de 50 Ω este conectată o sarcină de impedanță complexă $\underline{Z}_s = 130 + 120j$ [Ω]. Folosind diagrama Smith, să se determine și să se reprezinte grafic raportul de undă staționară S.

- Calculăm impedanța normalizată $\underline{z}_s = \underline{Z}_s / \underline{Z}_0 = 2{,}6 + 2{,}4j$

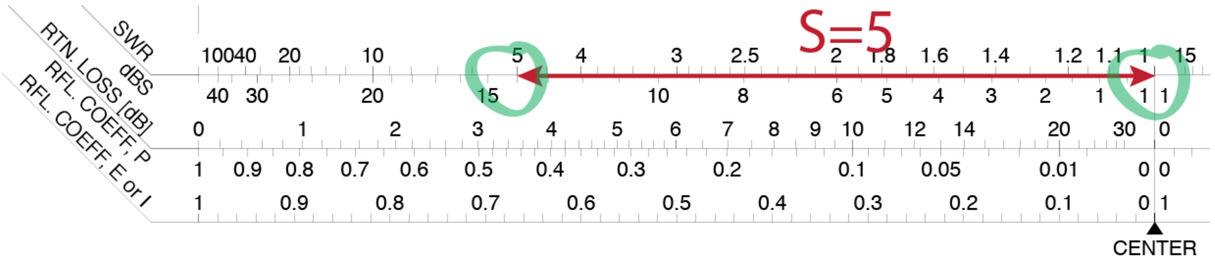
- Desenăm cercul cu centrul în mijlocul diagramei și cu raza dată de $\underline{z}_s$

- S poate fi determinat în două feluri:
  - Îl citim de pe axa rezistențelor în dreapta centrului,



Exemplul 3.
Să se reprezinte cercul de S-constant

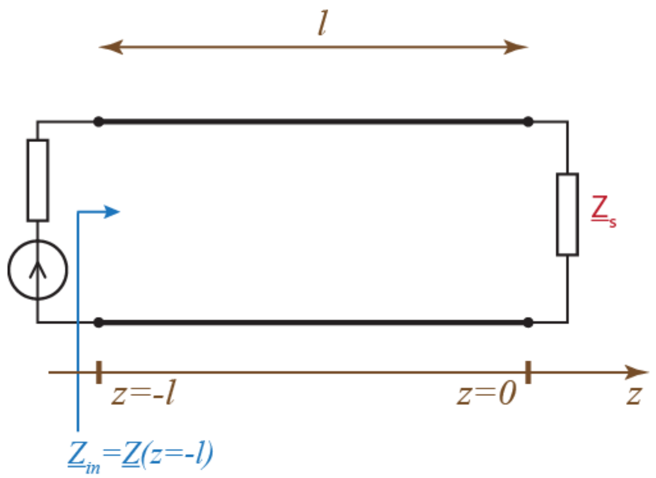
- La capătul unei LTFP de 50 Ω este conectată o sarcină de impedanță complexă $Z_s = 130 + 120j$ [Ω]. Folosind diagrama Smith, să se determine și să se reprezinte grafic raportul de undă staționară S.
- Calculăm impedanța normalizată $\underline{z_s} = \underline{Z_s}/\underline{Z_0} = 2{,}6 + 2{,}4j$
- Desenăm cercul cu centrul în mijlocul diagramei și cu raza dată de $\underline{z_s}$
- S poate fi determinat în două feluri:
  - Îl citim de pe axa rezistențelor în dreapta centrului,
  - Sau, mai bine, îl citim de pe scala „SWR” din josul paginii, reținând raza cu ajutorul compasului.



O scurtă recapitulare

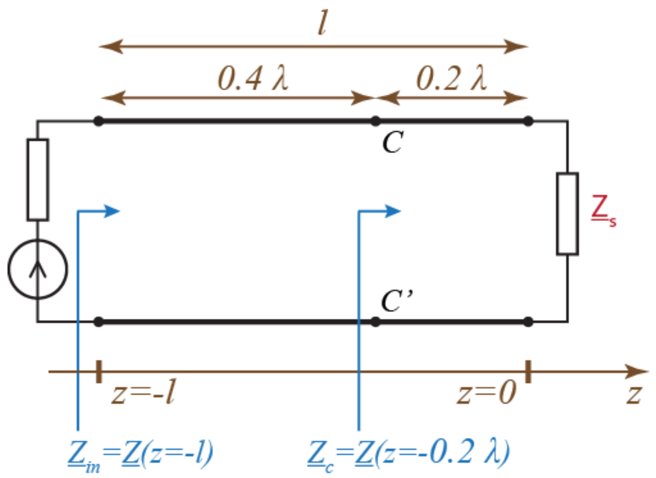
- Știm că de-a lungul liniei impedanța complexă $\underline{Z}$ văzută uitându-ne spre sarcină variază cu poziția.
- Am numit-o **impedanță de linie**.
- Care e legătura dintre impedanța de linie, cea de sarcină și cea de intrare?

$$\underline{Z}_{in} = \underline{Z}(z = -l) \qquad \underline{Z}_s = \underline{Z}(z = 0)$$



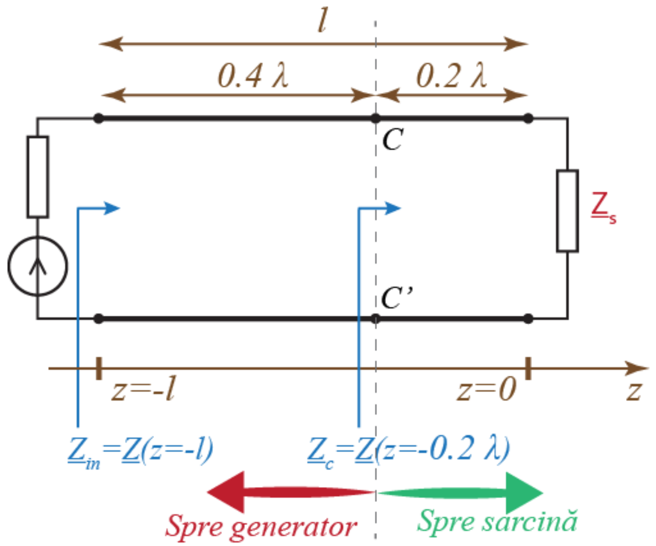
Cu ce ne ajută cercurile de S-constant?

- Sunt foarte importante! De-a lungul lor regăsim impedanța de linie.
- De exemplu, presupunem că știm impedanța normalizată de linie $\underline{z}_C$ la bornele CC' din figură.
- Vrem să calculăm impedanțele de intrare și de sarcină.



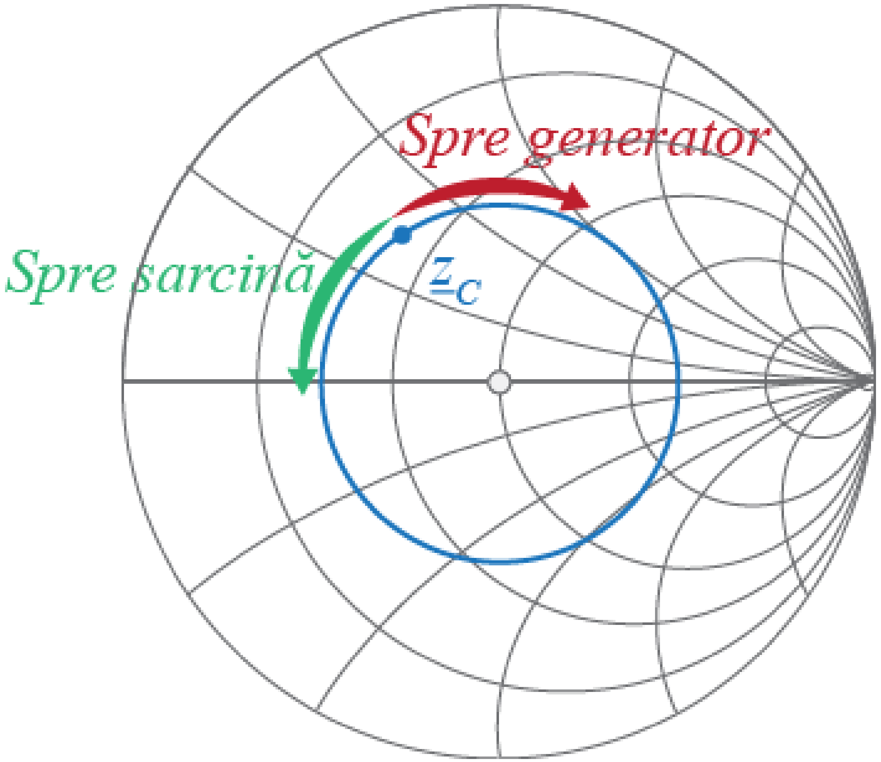
Cu ce ne ajută cercurile de S-constant?

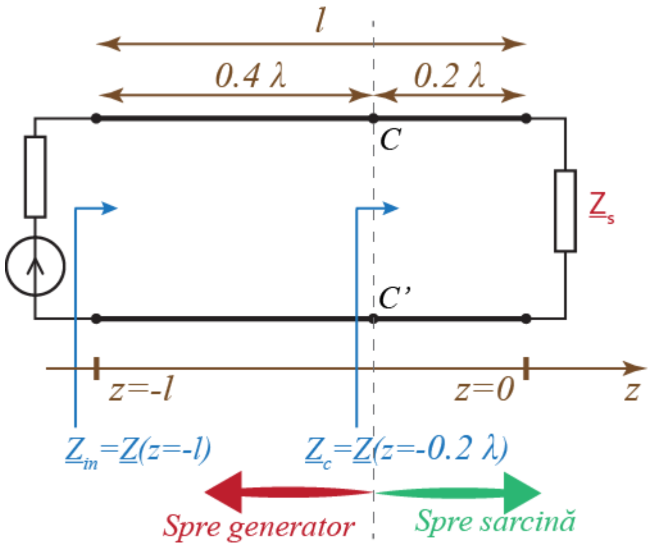
- Sunt foarte importante! De-a lungul lor regăsim impedanța de linie.
- De exemplu, presupunem că știm impedanța normalizată de linie $\underline{z}_C$ la bornele CC' din figură.
- Vrem să calculăm impedanțele de intrare și de sarcină.
- Pentru a ajunge la sarcină trebuie să parcurgem o distanță de 0,2λ în sensul pozitiv al axei Oz.
- Pentru a ajunge la generator trebuie să parcurgem 0,4 λ în sensul negativ.



Cu ce ne ajută cercurile de S-constant?

Aceste două sensuri corespund, pe diagramă, celor două scale: „Wavelengths toward generator” și „Wavelengths toward load” de pe circumferința diagramei



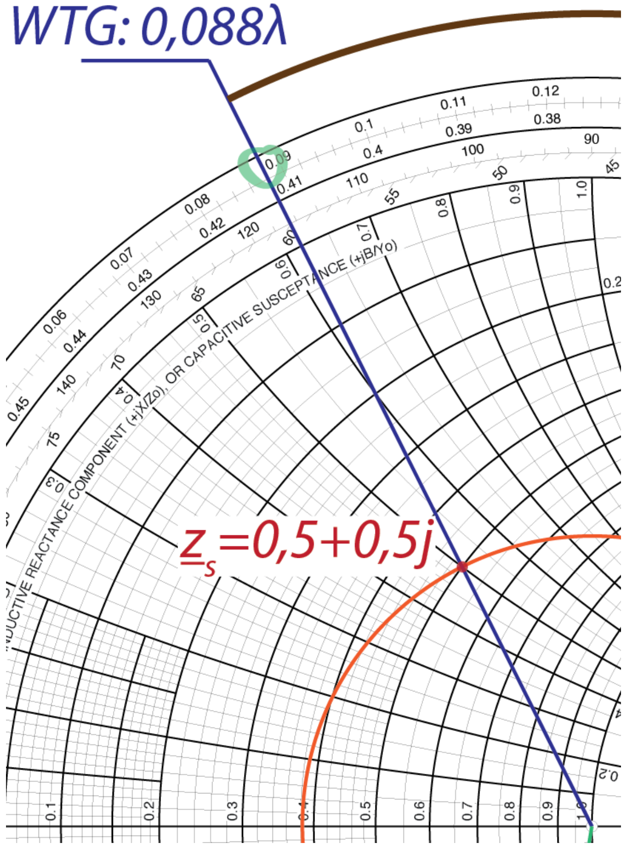


Exemplul 4.
Calculați impedanța de intrare.

Să se calculeze impedanța de intrare pentru o LTFP de 100Ω și lungime l=0,3λ terminată în $\underline{Z}_s$=50+50j Ω.

Aplicăm pașii:

- Calculăm impedanța normalizată $\underline{z}_s$=0,5+0,5j
- O reprezentăm pe diagramă
- Trasăm cercul de S constant (S=2,61 în cazul nostru)
- Tragem linia albastră până la scala WTG

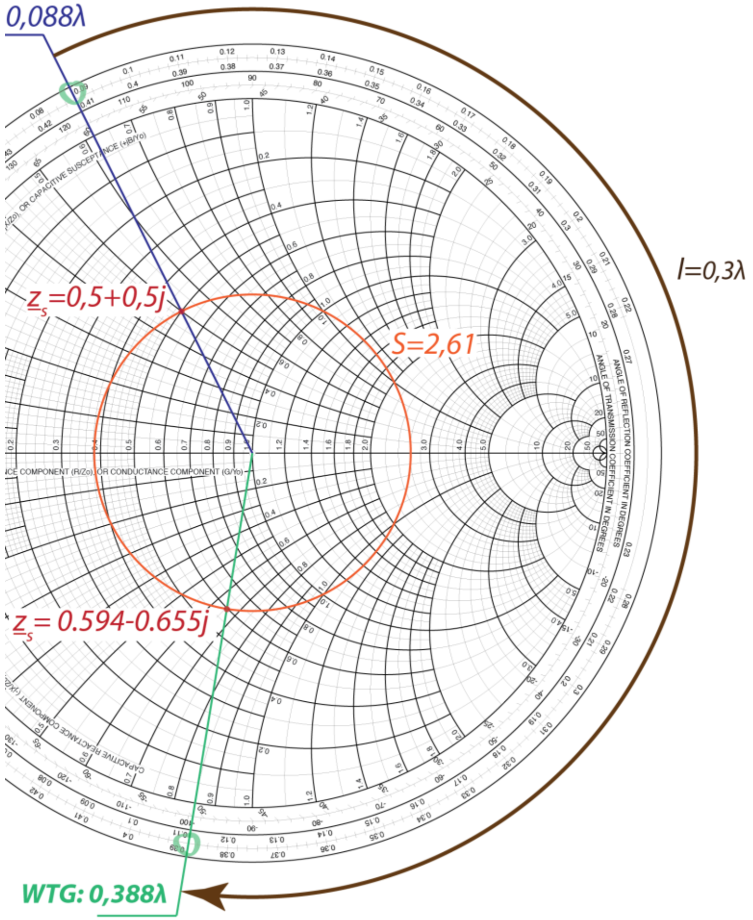


Exemplul 4.
Calculați impedanța de intrare.

Să se calculeze impedanța de intrare pentru o LTFP de 100Ω și lungime l=0,3λ terminată în $\underline{Z}_s$=50+50j Ω.

Aplicăm pașii:

- Calculăm impedanța normalizată $\underline{z}_s$=0,5+0,5j
- O reprezentăm pe diagramă
- Trasăm cercul de S constant (S=2,61 în cazul nostru)
- Tragem linia albastră până la scala WTG
- Reținem valoarea de pe scală: 0,088λ și adăugăm lungimea liniei 0,3λ



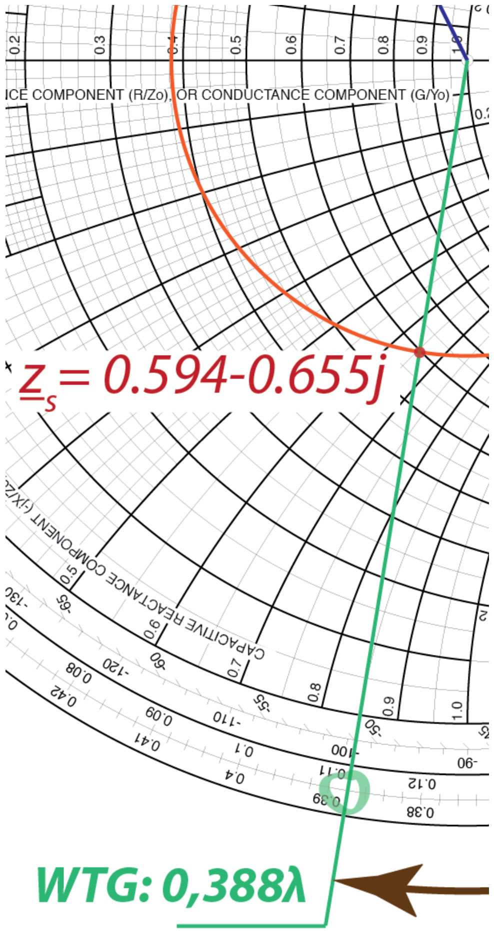
Exemplul 4.
Calculați impedanța de intrare.

Să se calculeze impedanța de intrare pentru o LTFP de 100Ω și lungime l=0,3λ terminată în $\underline{Z}_s$=50+50j Ω.

Aplicăm pașii:

- Calculăm impedanța normalizată $\underline{z}_s$=0,5+0,5j
- O reprezentăm pe diagramă
- Trasăm cercul de S constant (S=2,61 în cazul nostru)
- Tragem linia albastră până la scala WTG
- Reținem valoarea de pe scală: 0,088λ și adăugăm lungimea liniei 0,3λ
- Identificăm cota 0,388λ pe linie și trasăm linia verde
- Identificăm coordonatele punctului în care dreapta verde intersectează cercul de S=2,61

Obținem: $\underline{z}_{in}$ = 0.594-0.655j; $\underline{Z}_{in} = \underline{Z}_0\ \underline{z}_{in}$ = 59.4-65.5j Ω



Exemplul 5.
Calculați impedanța de sarcină

Să se calculeze impedanța de sarcină pentru o LTFP de 50Ω și lungime l=1,32λ și care are impedanța de intrare $\underline{Z}_{in}$=150-25j Ω.

Rezolvarea este similară cu cea de la exemplul anterior. În acest caz ne vom ghida după scala „Wavelengths toward load” (de ce?) și vom parcurge diagrama în sens trigonometric.

În acest caz lungimea va fi mai mare de 0,5λ (maximul de pe cele două scale). Cum procedăm? Evident, nu suntem limitați la linii ce au $l \leq 0{,}5\lambda$.

Analizând cele două scale WTL și WTG observăm că impedanța de linie este o mărime periodică *în spațiu*. Care este perioada ei conform valorilor de pe cele două scale?

$\underline{z}_s$ = 0.368-0.351j Ω $\underline{Z}_s$ = 18.42-17.56j Ω

O scurtă recapitulare

Orice impedanță complexă $\underline{Z}$ poate fi scrisă ca:

$$\underline{Z} = R + jX$$

Rezistența de c.a.

Reactanța

Impedanța complexă normalizată $\underline{z}$ asociată lui $\underline{Z}$ se obține din raportul

$$\underline{z} = \underline{Z}/\underline{Z}_0 = \mathrm{r} + \mathrm{jx}$$

unde $\underline{Z}_0$ este impedanța caracteristică a linei cu care lucrăm.

Admitanța complexă $\underline{Y}$ este inversul impedanței complexe și poate fi scrisă ca:

$$\underline{Y} = G + jB$$

Conductanța de c.a.

Susceptanța

Admitanța complexă normalizată $\underline{y}$ asociată lui $\underline{Y}$ se obține din raportul

$$\underline{y} = \underline{Y}/\underline{Y}_0 = \mathrm{g} + \mathrm{jb}$$

unde $\underline{Y}_0=1/\underline{Z}_0$ este admitanța caracteristică a linei cu care lucrăm.

Cum putem calcula admitanța normalizată, cunoscând impedanța normalizată?

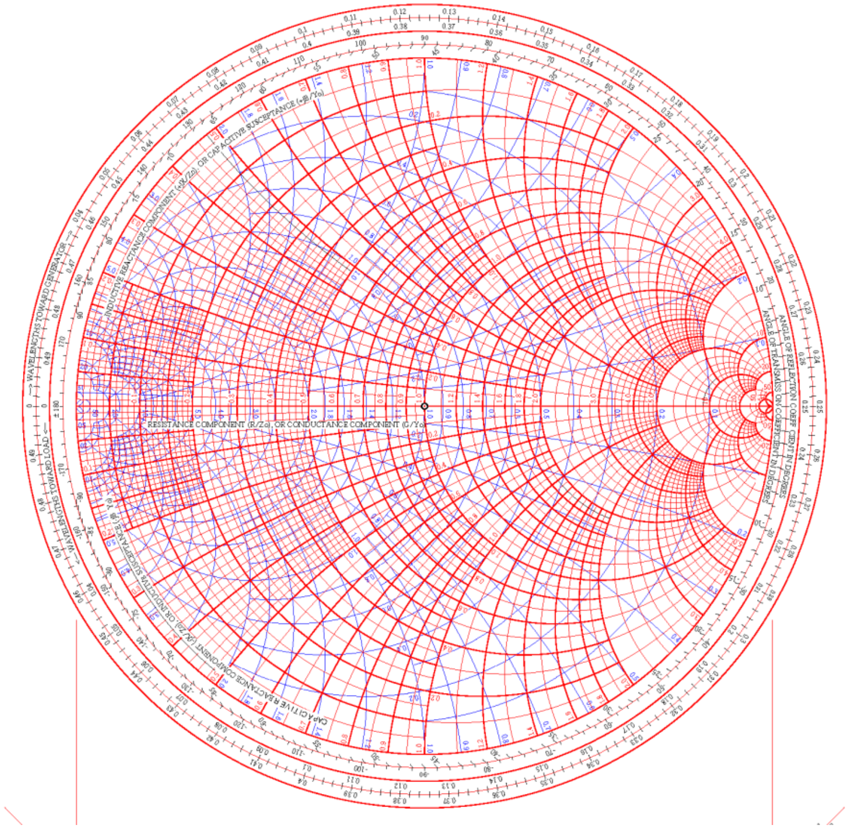
Dacă folosim diagrama Smith avem mai multe opțiuni.

Putem folosi o versiune mai complicată a diagramei Smith

Sau... Putem folosi versiunea simplă astfel:

1. Desenăm impedanța normalizată $\underline{z}$
2. Trasăm cercul de S-constant
3. Trasăm o dreaptă ce trece prin $\underline{z}$, prin centrul diagramei și intersectează cercul în punctul diametral opus
4. Admitanța se va afla în acel punct (dacă schimbăm interpretarea cercurilor de coordonate: cercurile-r devin cercuri-g, iar cercurile-x devin cercuri-b). Vezi pagina următoare.

Verificați pe un exemplu simplu!



Cum putem calcula admitanța normalizată, cunoscând impedanța normalizată?