Recapitulare algebră şi analiză matematică

Problema 1. Fie vectorii $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ şi $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$. Utilizând notaţia $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ şi $\mathbf{r}_{13} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ să se determine expresia produsului vectorial $\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{r}_{13}$ (*se va dezvolta determinantul fără a se realiza înmulţirea parantezelor*). Cunoscând faptul că aria triunghiului generat de vectorii $\mathbf{r}_{12}$ şi $\mathbf{r}_{13}$ este egală cu $A = \frac{1}{2}\left|\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{r}_{13}\right|$ să se deseneze vectorii $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_{12}$, $\mathbf{r}_{13}$ şi să se calculeze aria triunghiului pentru cazurile:

a) $\mathbf{r}_1 = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = 0\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = 4\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$,

b) $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$,

c) $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ (*aici nu se cere desenul*).

Problema 2. Fie vectorii $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = C_x\mathbf{i} + C_y\mathbf{j} + C_z\mathbf{k}$. Să se calculeze volumul paralelipipedului generat de cei trei vectori ţinându-se cont de faptul că acesta este egal cu modulul produsului lor mixt. Date numerice: $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ [m], $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ [m], $\mathbf{C} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ [m].
Răspuns: 60 m^3

Problema 3. Să se calculeze produsul scalar de produse vectoriale $\mathbf{W} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$. ***Indiciu:*** *Se va ţine cont de proprietăţile şi modul de definire ale produselor: mixt şi dublu vectorial.*

Problema 4. Fie $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vectorul de poziţie asociat punctului de coordonate (x, y, z) şi lungimea acestuia: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Să se calculeze sau să se demonstreze

a) $grad\left(r^2\right)$ ***Indiciu:*** *Formula pentru gradient de funcţie compusă (vezi cursul sau seminarul).*

b) $div(\mathbf{r}) = 3$ ***Indiciu:*** *Formula pentru divergenţă.*

c) $rot(\mathbf{r}) = 0$ ***Indiciu:*** *Formula pentru rotor.*

d) $div\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)$ ***Indiciu:*** *Operatorul* ∇ *aplicat unui produs de funcţii (vezi cursul sau seminarul).*

e) $rot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)$

f) $rot(\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{A}$, unde $\mathbf{A}$ este constant (mai exact un câmp vectorial a cărui valoare şi orientare nu se modifică în spaţiu)

Rezolvare pentru subpunctul f.

Operatorul rotor poate fi scris cu ajutorul *operatorului nabla* ∇ astfel:

$$rot(\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{r}), \tag{1}$$

unde ∇ este simultan şi un operator diferenţial şi un vector (are, deci, proprietăţile dar şi restricţiile acestora). Acesta este definit astfel:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{2}$$

Pentru mai multe informaţii referitoare la ∇ vezi cursul.

Într-o primă etapă îl considerăm ca fiind un operator diferenţial. Deoarece $\mathbf{A}$ este constant acesta trebuie „scos în faţa derivării” într-o manieră similară cu tratarea derivatelor:

$$(cf)' = c(f)' \tag{3}$$

Însă, deoarece **A** intră în componenţa unui produs vectorial acest lucru nu este posibil. Nu putem scrie $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{r})$ sau $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{r}$ deoarece relaţiile nu sunt adevărate (vezi proprietăţile produsului dublu vectorial).

Analizând relaţia (1) observăm că are forma unui produs dublu vectorial. Una din proprietăţile acestuia este:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \tag{4}$$

Putem scrie, deci:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \tag{5}$$

Deoarece $\nabla \cdot \mathbf{r} = div(\mathbf{r}) = 3$ primul termen din membrul drept va fi $3\mathbf{A}$.

La prima vedere al doilea termen este nul deoarece **A** e constant. O atenţie deosebită trebuie însă acordată în acest caz: deoarece **A** este constant acesta trebuie „scos în faţă” (vezi (3)). Derivarea nu se aplică acestuia. De fapt, modul în care fost scris al doilea termen nu este strict corect. Corect ar fi fost cu **A** „scos în faţă”. *Funcţia* căreia îi aplicăm ∇ este, de fapt, **r** şi, conform proprietăţilor lui ∇ aceasta trebuie plasată după el. Relaţia (5) capătă forma:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{r} \tag{6}$$

Expresia $(\mathbf{A} \cdot \nabla)$ este de fapt un operator diferenţial de forma:

$$\mathbf{A} \cdot \nabla = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{7}$$

Se observă că relaţia $\mathbf{A} \cdot \nabla$ nu este comutativă: $\mathbf{A} \cdot \nabla \neq \nabla \cdot \mathbf{A}$. Studenţii sunt încurajaţi să determine $\nabla \cdot \mathbf{A}$ şi să compare cu (7).

Acest operator se aplică lui **r** şi se poate arăta că $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{A}$ ţinând cont de faptul că derivata unui vector se realizează derivând fiecare componentă în parte. Rezultatul final, este, într-adevăr: $rot(\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{A}$.

În cazul în care **A** nu este constant ∇ se aplică într-o manieră similară cazului derivării unui produs de funcţii:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = \nabla \times (\underset{\uparrow}{\mathbf{A}} \times \mathbf{r}) + \nabla \times (\mathbf{A} \times \underset{\uparrow}{\mathbf{r}}). \tag{8}$$