Tema seminar # 7 (BE1)

Recapitulare trigonometrie și numere complexe

George Marian Vasilescu

18 Noi. 2016

Exercițiul 1. Desenați un cerc de rază 1 având centrul în originea unui sistem de coordonate cartezian (cercul trigonometric). Desenați dreapta tangentă la cerc în punctul de coordonate $(1, 0)$.

Desenați, în aceeași figură, punctele de coordonate

$A(\sin(30°), \cos(30°))$, $B(\sin(0°), \cos(0°))$, $C(\sin(\pi/2), \cos(\pi/2))$, $D(\sin(5\pi/4), \cos(5\pi/4))$, $E(\sin(-45°), \cos(-45°))$, $F(1, \mathrm{tg}(45°))$, $G(1, \mathrm{tg}(3\pi/4))$.

Care este interpretarea geometrică a funcțiilor sin, cos, tg atunci când ne raportăm la cercul trigonometric și dreapta tangentă la acesta în punctul $(1, 0)$?

Exercițiul 2. Identificați partea reală și partea imaginară pentru următoarele numere complexe. Reprezentați numerele complexe în planul complex.

$\underline{z}_1 = 1 + j$, $\underline{z}_2 = j$, $\underline{z}_3 = -2 + j$, $\underline{z}_4 = -2$, $\underline{z}_5 = -1 - 2j$, $\underline{z}_6 = -3j$, .

Exercițiul 3. Identificați modulul și argumentul pentru următoarele numere complexe. Reprezentați numerele complexe în planul complex.

$\underline{z}_1 = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$, $\underline{z}_2 = e^{j\frac{\pi}{4}}$, $\underline{z}_3 = 2e^{j\frac{3\pi}{4}}$, $\underline{z}_4 = 3e^{j\pi}$, $\underline{z}_5 = e^{-j\frac{\pi}{4}}$, $\underline{z}_6 = 2e^{j3\pi}$.

Exercițiul 4. Următoarele numere complexe sunt reprezentate în *formă carteziană*[1]. Determinați-le formele polare și reprezentați-le grafic, indicând pe desen modulul și argumentul.

$\underline{z}_1 = 2$, $\underline{z}_2 = 2 + 2j$, $\underline{z}_3 = j$, $\underline{z}_4 = -1 + j$, $\underline{z}_5 = -1 - j$, $\underline{z}_6 = -1 - 2j$.

Exercițiul 5. Următoarele numere complexe sunt reprezentate în *formă polară*[2]. Determinați-le formele carteziene și reprezentați-le grafic, indicând pe desen partea reală și partea imaginară.

$\underline{z}_1 = 4e^{j\frac{\pi}{2}}$, $\underline{z}_2 = 2e^{-j\pi}$, $\underline{z}_3 = 2e^{-j\frac{3\pi}{4}}$, $\underline{z}_4 = 2e^{j\pi}$.

Exercițiul 6. Să se reprezinte în planul complex numerele:

a) $\underline{z}_1 = 2$ $\underline{z}_2 = 2j$ $\underline{z}_3 = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$

Comparați adunarea numerelor complexe cu adunarea vectorilor (cu regula paralelogramului).

b) $\underline{z}_1 = e^{j\frac{\pi}{2}}$ $\underline{z}_2 = -1$ $\underline{z}_3 = \underline{z}_1 - \underline{z}_2$

Ce valoare are întotdeauna modulul unui număr complex de forma $e^{j\varphi}$?

c) $\underline{z}_1 = 1 + j$ $\underline{z}_2 = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \underline{z}_1$

Ce corespunde din punct de vedere geometric, în planul complex, înmulțirii unui număr complex cu un alt un număr complex de forma $e^{j\varphi}$ (cu $\varphi > 0$)? Dar cu unul de forma $e^{-j\varphi}$?

---

[1] Spunem că un număr complex $\underline{z}$ are formă carteziană dacă este scris sub forma $\underline{z} = a + bj$, unde a și b sunt numere reale

[2] Spunem că un număr complex $\underline{z}$ are formă polară dacă este scris sub forma $\underline{z} = re^{j\varphi}$, unde $r \geq 0$ și φ sunt numere reale. Atenție la semnul lui r!

d) $\underline{z}_1 = 1 + j$ $\underline{z}_2 = 3\underline{z}_1$

Ce corespunde din punct de vedere geometric, în planul complex, înmulțirii unui număr complex cu un număr real a?

Exercițiul 7. Calculați:

a) j^3, $(1-j)^2$, $(1+j)(1-j)$, $j(1-j)$,

b) $\frac{4}{j} + e^{-j\pi/2}$, $\frac{1+j}{1-j} + \frac{2+2j}{1+j}$,

c) $\frac{j}{3+3j} \cdot 12 + e^{j90^\circ} + j\frac{8}{-2+2j}$

Soluții și indicii

Soluția 1.
Toate punctele sunt situate *obligatoriu* pe cerc sau pe dreaptă! Indiciu pentru interpretarea geometrică: trasați o dreaptă ce trece prin origine și punctul desenat de voi; aceasta se va intersecta cu cercul și cu dreapta.

Soluția 2.
$\mathrm{Re}(\underline{z}_5) = -1$, $\mathrm{Im}(\underline{z}_5) = -2$.

Soluția 3.
$|\underline{z}_1| = \sqrt{2}$, $\arg(\underline{z}_1) = \frac{\pi}{4}$; $|\underline{z}_4| = 3$, $\arg(\underline{z}_4) = \pi$.

Soluția 4.
$\underline{z}_1 = 2e^{j0}$; $\underline{z}_5 = \sqrt{2}e^{j\frac{5\pi}{4}}$. Pentru aflarea $\arg(\underline{z}_6)$ folosiți calculatorul; atenție la formulă: numărul se află în semiplanul stâng!

Soluția 5.
Aplicăm formula lui Euler: $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$. $\underline{z}_2 = \underline{z}_4 = -2$.

Soluția 7.
c) $4 + j$