

3. Circuite în regim armonic permanent (de curent alternativ)

3.1. Mărimi sinusoidale (armonice)

Se numește **mărimă periodică** o mărime $m(t)$ a cărei variație în timp are proprietatea că succesiunea sa de valori se regăsește în timp după intervale egale:

$$m(t) = m(t + T) = m(t + 2T) = m(t + nT), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Intervalul cel mai mic de timp T după care valorile funcției $m(t)$ se reproduc identic poartă numele de **perioadă** și are în S.I. unitatea de măsură secunda.

Frecvența f a mărimii periodice $m(t)$ reprezintă numărul de perioade cuprins în unitatea de timp:

$$f = \frac{1}{T},$$

iar unitatea sa de măsură în S.I. este secunda⁻¹ care poartă numele de hertz (Hz).

Pulsația ω a mărimii periodice $m(t)$ de frecvență f se definește prin relația

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot \frac{1}{T} > 0$$

atunci când pulsația se exprimă în radiani/secundă și, respectiv, prin relația

$$\omega = 360 \cdot f = 360 \cdot \frac{1}{T} > 0$$

atunci când pulsația se exprimă în grade/secundă.

Se numește **valoare instantanee** (sau **momentană**) a mărimii $m(t)$ valoarea pe care o ia funcția $m(t)$ la momentul de timp t .

Valoarea maximă M_{\max} a mărimii periodice $m(t)$ este cea mai mare valoare pe care o ia această funcție în decursul unei perioade.

Valoarea medie \tilde{m} pe o perioadă a mărimii periodice $m(t)$ este

$$\tilde{m} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} m(t) \cdot dt, \quad (3.1.1)$$

unde t_0 este un moment de timp ales arbitrar.

Valoarea efectivă M a mărimii periodice $m(t)$ este prin definiție

$$M = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} m^2(t) \cdot dt} > 0. \quad (3.1.2)$$

Se numește **mărimie alternativă** acea mărime periodică a cărei valoare medie în decurs de o perioadă este nulă.

Se numește **mărimie sinusoidală** (sau **armonică**) mărimea alternativă $m(t)$ care are o variație sinusoidală în timp, de forma

$$m(t) = M_{\max} \cdot \sin(\omega t + \alpha).$$

Valoarea maximă $M_{\max} > 0$ a mărimii sinusoidale $m(t)$ se numește **amplitudine**, iar argumentul variabil în timp $(\omega t + \alpha)$ al sinusului (exprimat în grade sau radiani) poartă numele de **fază instantanee** (sau **momentană**) a mărimii $m(t)$.

Valoarea α a fazei se numește **fază inițială**.

Întrucât

$$M = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} M_{\max}^2 \cdot \sin^2(\omega t + \alpha) \cdot dt} = \frac{M_{\max}}{\sqrt{2}},$$

expresia analitică a variației în timp a mărimii $m(t)$ poate fi pusă întotdeauna sub forma

$$m(t) = M \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \alpha),$$

cu $M, \omega > 0$ și $\alpha \in [-\pi \text{ rad}; +\pi \text{ rad}]$ (respectiv $\alpha \in [-180^\circ; +180^\circ]$), pe care o vom numi **forma canonică normală în sinus** (pe scurt **forma normală în sinus**) a mărimii $m(t)$.

Fie două mărimi sinusoidale $m_1(t)$ și $m_2(t)$, de aceeași natură sau de naturi diferite, ambele de pulsație ω și ambele aduse în formă normală în sinus:

$$m_1(t) = M_1 \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \alpha_1)$$

și

$$m_2(t) = M_2 \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \alpha_2).$$

Se definește **defazajul** φ_{12} între $m_1(t)$ și $m_2(t)$, în această ordine, ca fiind diferența fazelor instantanee ale celor două mărimi:

$$\varphi_{12} = (\omega t + \alpha_1) - (\omega t + \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2. \quad (3.1.3)$$

Dacă $|\varphi_{12}| > \pi$ radiani, atunci se adoptă o nouă definiție a defazajului și anume

$$\varphi_{12} = \alpha_1 - \alpha_2 + 2n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.1.4)$$

în care întregul n se alege astfel încât să aducă defazajul φ_{12} în intervalul $\alpha \in [-\pi \text{ rad}; +\pi \text{ rad}]$.

Dacă $\varphi_{12} = 0$ se spune că cele două mărimi sunt **în fază**, dacă $|\varphi_{12}| = \frac{\pi}{2}$ radiani ele sunt **în cuadratură**, iar dacă $|\varphi_{12}| = \pi$ radiani ele sunt **în opoziție**.

Dacă $\varphi_{12} > 0$ atunci mărimea $m_1(t)$ este defazată **înaintea** mării $m_2(t)$, iar dacă $\varphi_{12} < 0$ atunci mărimea $m_1(t)$ este defazată **în urma** mării $m_2(t)$.

3.2. Reprezentarea geometrică (cu vectori liberi) și reprezentarea analitică (în complex simplificat) a mărimilor sinusoidale

Fie o mulțime de mărimi sinusoidale (de aceeași natură sau de naturi diferite), **toate de aceeași pulsație ω și toate aduse în formă normală în sinus**:

$$m_k(t) = M_k \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \alpha_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

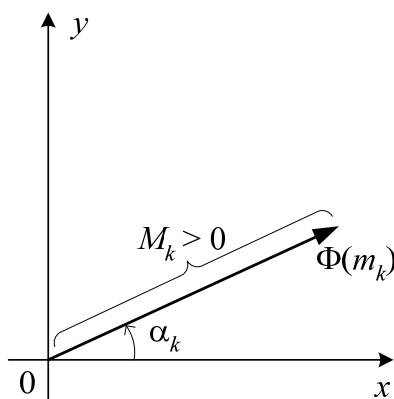


Figura 3.2.1

Considerând **mulțimea vectorilor liberi** într-un plan (xOy), **în reprezentarea geometrică a mărimilor sinusoidale** se atașează fiecărei mărimi sinusoidale $m_k(t)$ un vector liber (numit **fazor** și notat $\Phi(m_k)$) și reciproc

$$m_k(t) \rightleftarrows \Phi(m_k) \quad (3.2.1)$$

după următoarea convenție: fazorul $\Phi(m_k)$ are modulul egal cu valoarea efectivă ($M_k > 0$) a mărimii sinusoidale respective și argumentul ($\alpha \in [-\pi \text{ rad}; +\pi \text{ rad}]$) egal cu faza inițială a acesteia (vezi figura 3.2.1).

Considerând **mulțimea numerelor complexe, în reprezentarea analitică (în complex simplificat) a mărimilor sinusoidale** se asociază fiecărei mărimi sinusoidale $m_k(t)$ un număr complex (numit **simbol** sau **image** și notat \underline{M}_k) și reciproc

$$m_k(t) \longleftrightarrow \underline{M}_k \quad (3.2.2)$$

după următoarea convenție: numărul complex \underline{M}_k are modulul egal cu valoarea efectivă ($M_k > 0$) a mărimii sinusoidale și argumentul ($\alpha \in [-\pi \text{ rad}; +\pi \text{ rad}]$) egal cu faza inițială a acesteia (vezi figura 3.2.2).

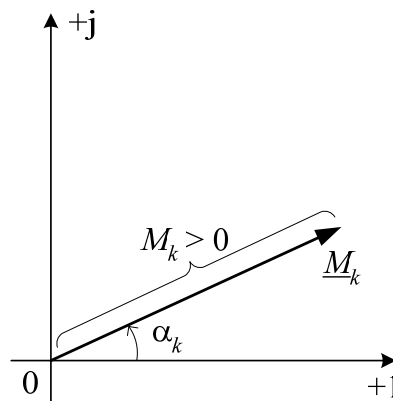


Figura 3.2.2

Correspondența va fi notată

$$m_k(t) = M_k \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \alpha_k) \quad \longleftrightarrow \quad \underline{M}_k = M_k \cdot e^{j \cdot \alpha_k} \quad (3.2.3)$$

Identificând planul (xOy) al reprezentării geometrice cu planul complex (în care, pentru simplitatea notației, s-a indicat sensul pozitiv al axei reale prin simbolul +1, iar sensul pozitiv al axei imaginare prin simbolul +j), se remarcă faptul că fazorii $\Phi(m_k)$ coincid cu vectorii de poziție ai afixelor numerelor complexe \underline{M}_k .

În consecință, în cele ce urmează se va renunța la notația $\Phi(m_k)$, astfel încât **prin \underline{M}_k se va înțelege atât numărul complex, cât și fazorul asociat acestuia.**

Construcțiile grafice care se realizează cu fazori (asociați în general unor mărimi diferite) poartă numele de **diagrame fazoriale**.

3.3. Operațiile cu simboluri corespunzătoare operațiilor cu mărimi sinusoidale

Fie o mulțime de p mărimi sinusoidale (de aceeași natură sau de naturi diferite), toate de aceeași pulsație ω și toate aduse în formă normală în sinus: $m_k(t) = M_k \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \alpha_k)$, $k = 1, 2, \dots, p$, și fie o mulțime de p constante reale λ_k , $k = 1, 2, \dots, p$. Dacă \underline{M}_k sunt imaginile complexe ale mărimilor $m_k(t)$, atunci:

• **sumei algebrice $\sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot m_k(t)$ a mărimilor sinusoidale îi corespunde biunivoc suma algebrică $\sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot \underline{M}_k$ a simbolurilor acestora și, respectiv, suma algebrică a fazorilor asociați;**

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot m_k(t) \iff \sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot \underline{M}_k; \quad (3.3.1)$$

• **derivării în raport cu timpul a oricărei mărimi $m_k(t)$ îi corespunde biunivoc înmulțirea cu factorul complex constant $j\omega$ a imaginii complexe \underline{M}_k asociate mărimii $m_k(t)$:**

$$\frac{dm_k(t)}{dt} \iff j\omega \cdot \underline{M}_k; \quad (3.3.2)$$

din punct de vedere fazorial, derivării în raport cu timpul a mărimii $m_k(t)$ îi corespunde amplificarea fazorului \underline{M}_k cu scalarul pozitiv dimensional ω și rotirea fazorului $\omega \cdot \underline{M}_k$ cu $\frac{\pi}{2}$ radiani în sens trigonometric direct (vezi figura 3.3.1);

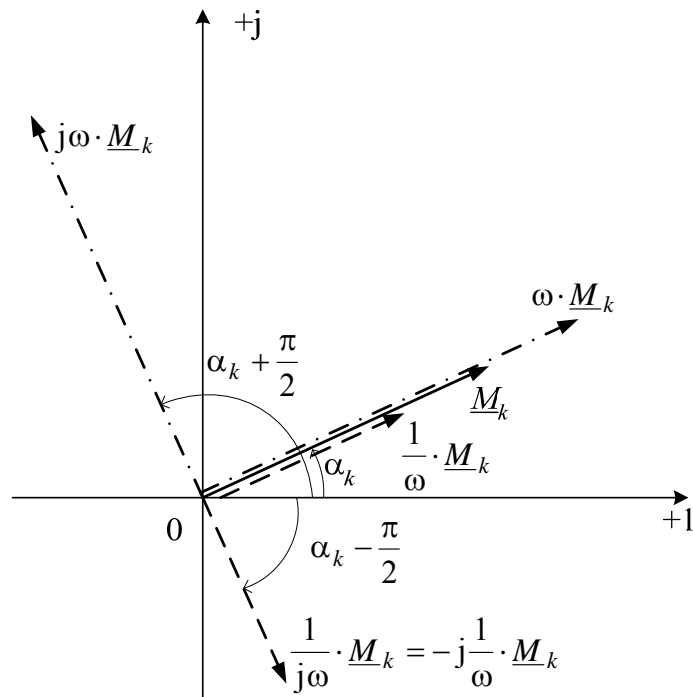


Figura 3.3.1

• integrării în raport cu timpul a oricărei mărimi $m_k(t)$ îi corespunde biunivoc împărțirea cu factorul complex constant $j\omega$ a imaginii complexe \underline{M}_k asociate mărimii $m_k(t)$:

$$\int m_k(t) \cdot dt \iff \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{M}_k; \quad (3.3.3)$$

din punct de vedere fazorial, integrării în raport cu timpul a mărimii $m_k(t)$ îi corespunde amplificarea fazorului \underline{M}_k cu scalarul pozitiv dimensional $1/\omega$ și rotirea fazorului $1/\omega \cdot \underline{M}_k$ cu $\pi/2$ radiani în sens trigonometric invers (vezi figura 3.3.1).

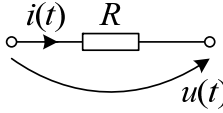
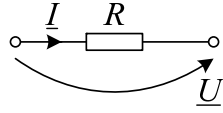
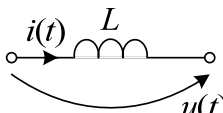
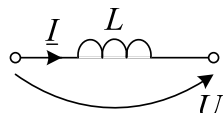
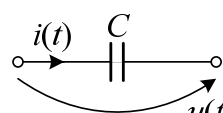
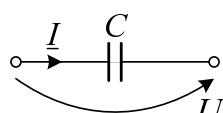
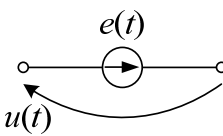
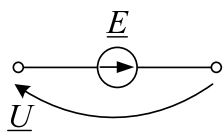
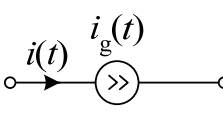
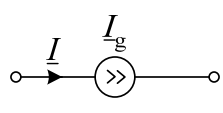
Observatie.

Nici produsele și nici rapoartele oricăror mărimi din mulțimea mărimilor sinusoidale de pulsație ω nu reprezintă mărimi sinusoidale de pulsație ω și, ca atare, acestora nu li se pot asocia simboluri complexe.

3.4. Comportarea în curent alternativ a elementelor dipolare ideale de circuit

Circuitele în care sursele de tensiune și de curent furnizează la bornele lor mărimi (tensiuni electromotoare și, respectiv, curenți electromotori) a căror variație în timp este sinusoidală, **toate având aceeași pulsație**, se numesc **circuite în regim armonic** (sau **circuite de curent alternativ**). În aceste condiții, după stingerea regimurilor tranzitorii, toate mărimile de circuit (curenți, tensiuni, potențiale) sunt de asemenea mărimi cu variație sinusoidală în timp, **de aceeași frecvență cu cea a surselor**.

Tabelul 3.4.1

Elementul ideal de circuit	Ecuția de funcționare în domeniul timp	Ecuția de funcționare în complex
Rezistorul ideal liniar	 $u(t) = R \cdot i(t)$	 $\underline{U} = R \cdot \underline{I}$
Bobina ideală liniară	 $u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$	 $\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I}$
Condensatorul ideal liniar	 $u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) \cdot dt$	 $\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I} = -j \frac{1}{\omega C} \cdot \underline{I}$
Sursa ideală de tensiune	 $u(t) = e(t), \forall i(t)$	 $\underline{U} = \underline{E}, \forall \underline{I}$
Sursa ideală de curent	 $i(t) = i_g(t), \forall u_g(t)$	 $\underline{I} = \underline{I}_g, \forall \underline{U}_g$

Comportarea în curent alternativ a elementelor dipolare ideale de circuit este sintetizată în tabelele 3.4.1 și 3.4.2.

Tabelul 3.4.2

Elementul ideal de circuit	Variațiile în timp ale mărimilor la borne tensiune $u(t)$ și curent $i(t)$ și diagrama fazorială aferentă fazorilor \underline{U} și \underline{I}
Rezistorul ideal liniar	
Bobina ideală liniară	
Condensatorul ideal liniar	

În tabelul 3.4.1 sunt prezentate ecuațiile de funcționare ale elementelor dipolare ideale în domeniul timp și în complex, \underline{U} și \underline{I} fiind simbolurile complexe ale mărimilor $u(t)$ și, respectiv, $i(t)$, iar în tabelul 3.4.2 sunt ilustrate variațiile în timp ale mărimilor la borne (tensiuni și curenți), precum și diagramele fazoriale aferente pentru elementele ideale pasive.

3.5. Caracterizarea în complex a circuitelor dipolare liniare pasive

Se consideră un circuit dipolar liniar și pasiv, necuplat magnetic cu exteriorul (vezi figura 3.5.1), alimentat pe la bornele (A) și (B) cu tensiunea $u(t) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \alpha_u)$, curentul absorbit fiind $i(t) = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \alpha_i)$.

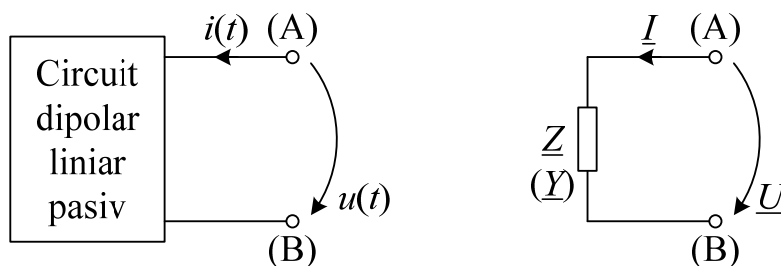


Figura 3.5.1

Raportate la circuitul dipolar pasiv, mărimile $u(t)$ și $i(t)$ sunt asociate conform convenției de la receptoare.

Fie $\varphi = \alpha_u - \alpha_i \in [-\pi/2 \text{ rad}; +\pi/2 \text{ rad}]$ defazajul tensiune-curent (exprimat în radiani) și fie $\underline{U} = U \cdot e^{j\alpha_u}$ și $\underline{I} = I \cdot e^{j\alpha_i}$ imaginile complexe ale mărimilor $u(t)$ și, respectiv, $i(t)$.

Se definesc următoarele mărimi complexe:

- impedanța complexă \underline{Z} :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \cdot e^{j\alpha_u}}{I \cdot e^{j\alpha_i}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j\varphi} = \frac{U}{I} \cdot \cos\varphi + j \frac{U}{I} \cdot \sin\varphi; \quad (3.5.1)$$

- admitanța complexă \underline{Y} :

$$\underline{Y} = \underline{Z}^{-1} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I}{U} \cdot e^{-j\varphi} = \frac{I}{U} \cdot \cos\varphi - j \frac{I}{U} \cdot \sin\varphi, \quad (3.5.2)$$

precum și următoarele mărimi scalare:

- impedanța Z :

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{U}{I} > 0; \quad (3.5.3)$$

- rezistența R :

$$R = \Re\{\underline{Z}\} = \frac{U}{I} \cdot \cos \varphi = Z \cdot \cos \varphi > 0; \quad (3.5.4)$$

• reactanța X :

$$X = \Im\{\underline{Z}\} = \frac{U}{I} \cdot \sin \varphi = Z \cdot \sin \varphi \geq 0; \quad (3.5.5)$$

• admitanța Y :

$$Y = |\underline{Y}| = \frac{I}{U} = Z^{-1} > 0; \quad (3.5.6)$$

• conductanța G :

$$G = \Re\{\underline{Y}\} = \frac{I}{U} \cdot \cos \varphi = Y \cdot \cos \varphi > 0; \quad (3.5.7)$$

• susceptanța B :

$$B = \Im\{\underline{Y}\} = \frac{I}{U} \cdot \sin \varphi = -Y \cdot \sin \varphi \geq 0. \quad (3.5.8)$$

Pentru o frecvență de lucru dată și în raport cu două borne date, se spune că un circuit pasiv de curent alternativ prezintă:

- un caracter pur rezistiv dacă $\varphi = 0$ radiani;
- un caracter pur reactiv (sau nedisipativ) dacă $|\varphi| = \frac{\pi}{2}$ radiani;
- un caracter pur inductiv dacă $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ radiani;
- un caracter pur capacitiv dacă $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ radiani;
- un caracter rezistiv-inductiv dacă $\varphi \in (0 \text{ rad}; +\frac{\pi}{2} \text{ rad})$;
- un caracter rezistiv-capacitiv dacă $\varphi \in (-\frac{\pi}{2} \text{ rad}; 0 \text{ rad})$.

Tabelul 3.5.1

Elementul ideal de circuit	\underline{Z}	Z	R	X	\underline{Y}	Y	G	B
Rezistorul ideal liniar	R	R	R	0	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{R}$	0
Bobina ideală liniară	$j\omega L$	ωL	0	ωL	$-j\frac{1}{\omega L}$	$\frac{1}{\omega L}$	0	$-\frac{1}{\omega L}$
Condensatorul ideal liniar	$-j\frac{1}{\omega C}$	$\frac{1}{\omega C}$	0	$-\frac{1}{\omega C}$	$j\omega C$	ωC	0	ωC

În tabelul 3.5.1 sunt prezentați parametrii \underline{Z} , Z , R , X , \underline{Y} , Y , G și B corespunzători elementelor ideale pasive de circuit.

3.6. Surse reale de tensiune și de curent

Schema echivalentă a unei **surse reale de tensiune** (SRT) este o schemă echivalentă **serie** care conține o sursă ideală de tensiune (de tensiune electromotoare complexă \underline{E}) și o impedanță complexă \underline{Z}'_i numită **impedanță complexă internă** a sursei reale de tensiune.

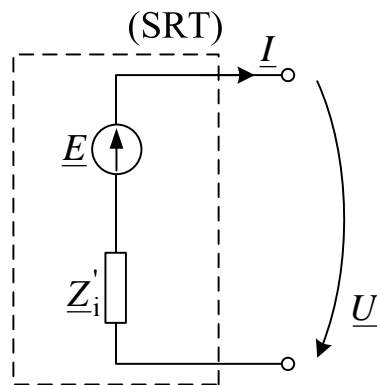


Figura 3.6.1

Dacă mărimile complexe la borne tensiune \underline{U} și curent \underline{I} sunt asociate ca sensuri de referință după **convenția de la generatoare** (vezi figura 3.6.1), atunci ecuația de funcționare a sursei este

$$\underline{U} = \underline{E} - \underline{Z}'_i \cdot \underline{I}. \quad (3.6.1)$$

Schema echivalentă a unei **surse reale de curent** (SRC) este o schemă echivalentă **paralel** care conține o sursă ideală de curent (de curent electromotor complex \underline{I}_g) și o impedanță complexă \underline{Z}_i'' numită **impedanță complexă internă** a sursei reale de curent.

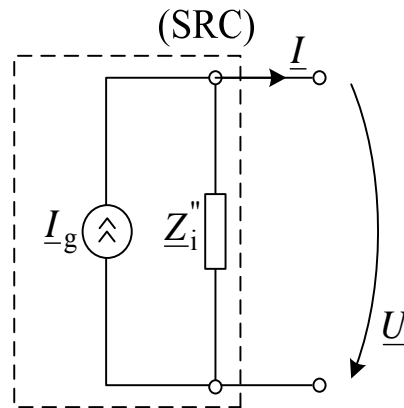


Figura 3.6.2

Dacă mărimile complexe la borne tensiune \underline{U} și curent \underline{I} sunt asociate ca sensuri de referință după **convenția de la generatoare** (vezi figura 3.6.2), atunci ecuația de funcționare a sursei este

$$\underline{I} = \underline{I}_g - \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_i''}. \quad (3.6.2)$$

3.7. Puteri transferate în circuite de curent alternativ

Se consideră din nou circuitul dipolar liniar și pasiv, necuplat magnetic cu exteriorul, ilustrat în figura 3.7.1, care este alimentat pe la bornele (A) și (B) cu tensiunea sinusoidală $u(t) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \alpha_u)$, curentul absorbit fiind $i(t) = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \alpha_i)$.

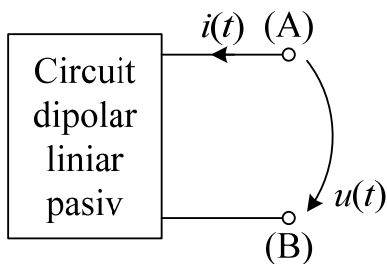


Figura 3.7.1

Raportate la circuitul dipolar pasiv, mărimile $u(t)$ și $i(t)$ sunt asociate conform convenției de la receptoare.

Fie $\varphi = \alpha_u - \alpha_i \in [-\pi/2 \text{ rad}; +\pi/2 \text{ rad}]$ defazajul tensiune-curent (exprimat în radiani), fie $\underline{U} = U \cdot e^{j\alpha_u}$ și $\underline{I} = I \cdot e^{j\alpha_i}$ imaginile complexe ale mărimilor $u(t)$ și, respectiv, $i(t)$ și fie $\underline{Z} = R + jX$ și $\underline{Y} = G + jB$ impedanța complexă și, respectiv,

admitanța complexă ale circuitului dipolar.

Se definesc următoarele puteri:

- **puterea instantanee** $p(t)$:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t), \quad (3.7.1)$$

cu unitatea de măsură **volt-amper** (VA);

- **puterea activă** P :

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi, \quad (3.7.2)$$

cu unitatea de măsură **watt** (W);

- **puterea reactivă** Q :

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi, \quad (3.7.3)$$

cu unitatea de măsură **volt-amper reactiv** (var);

- **puterea aparentă** S :

$$S = U \cdot I, \quad (3.7.4)$$

cu unitatea de măsură **volt-amper** (VA);

- **puterea complexă** \underline{S} :

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = S \cdot e^{j\varphi} = P + jQ. \quad (3.7.5)$$

În tabelul 3.7.1 sunt prezentate particularizările acestor puteri pentru elementele ideale pasive de circuit.

Tabelul 3.7.1

Elementul ideal de circuit	P	Q	S	\underline{S}
Rezistorul ideal liniar	$R \cdot I^2 =$ $= G \cdot U^2 > 0$	0	$R \cdot I^2 =$ $= G \cdot U^2 > 0$	$R \cdot I^2 =$ $= G \cdot U^2$
Bobina ideală liniară	0	$\omega L \cdot I^2 =$ $= \frac{1}{\omega L} \cdot U^2 > 0$	$\omega L \cdot I^2 =$ $= \frac{1}{\omega L} \cdot U^2 > 0$	$j\omega L \cdot I^2 =$ $= j \frac{1}{\omega L} \cdot U^2$
Condensatorul ideal liniar	0	$-\frac{1}{\omega C} \cdot I^2 =$ $= -\omega C \cdot U^2 < 0$	$\frac{1}{\omega C} \cdot I^2 =$ $= \omega C \cdot U^2 > 0$	$-j \frac{1}{\omega C} \cdot I^2 =$ $= -j\omega C \cdot U^2$

Deoarece mărimile la borne tensiune și curent au fost asociate după convenția de la receptoare, rezultă că în orice rețea de curent alternativ rezistoarele intervin doar în transferurile puterilor active (având rolul de **consumatoare** de putere activă întrucât $P > 0$), în timp ce bobinele și condensatoarele intervin numai în transferurile puterilor reactive (bobinele, pentru care $Q > 0$, sunt **consumatoare** de putere reactivă, iar condensatoarele, pentru care $Q < 0$, sunt **generatoare** de putere reactivă).

Factorul de putere k al circuitului dipolar pasiv propus este prin definiție raportul dintre puterea activă și puterea aparentă:

$$k = \frac{P}{S} = \cos \varphi \in [0; 1], \quad (3.7.6)$$

apropierea funcționării unei instalații de valoarea maximă a puterii sale active fiind dată de apropierea factorului de putere de valoarea 1 (vezi aplicațiile referitoare la ameliorarea factorului de putere).

Pentru o rețea cu L laturi (cu mărimile complexe la borne \underline{U}_k și \underline{I}_k asociate ca sensuri de referință după convenția de la receptoare), **neizolată și necuplată magnetic cu exteriorul**, având M borne de acces (care au potențialele complexe $\underline{V}_{b,p}$ și în care se injectează din exterior curenții complecși $\underline{I}_{b,p}$, $p = 1, 2, \dots, M$), **puterea complexă primită pe la borne** \underline{S}_b este

$$\underline{S}_b = \sum_{p=1}^M \underline{V}_{b,p} \cdot \underline{I}_{b,p}^* \quad (3.7.7)$$

și este egală cu suma puterilor complexe primite pe la borne de laturile sale:

$$\underline{S}_{lat} = \sum_{k=1}^L \underline{U}_k \cdot \underline{I}_k^* \quad (3.7.8)$$

În aceste relații $\underline{I}_{b,p}^*$ și \underline{I}_k^* reprezintă conjugatele mărimilor $\underline{I}_{b,p}$ și, respectiv, \underline{I}_k . Egalitatea

$$\sum_{p=1}^M \underline{V}_{b,p} \cdot \underline{I}_{b,p}^* = \sum_{k=1}^L \underline{U}_k \cdot \underline{I}_k^* \quad (3.7.9)$$

reflectă din punct de vedere matematic **forma generală a teoremei de conservare a puterilor complexe**.

Pentru o rețea izolată, teorema ia forma particulară: puterea activă P_{gen} debitată de toate sursele din rețea

$$P_{\text{gen}} = \Re\{S_{\text{gen}}\} = \Re\left\{\sum_{k=1}^L \mathcal{A} \underline{E}_k \cdot \underline{I}_k^* + \sum_{k=1}^L \mathcal{A} \underline{U}_{gk} \cdot \underline{I}_{gk}^*\right\} \quad (3.7.10)$$

este egală cu puterea activă P_{rez} disipată în toate rezistoarele rețelei

$$P_{\text{rez}} = \sum_{k=1}^L R_k \cdot I_k^2, \quad (3.7.11)$$

iar puterea reactivă Q_{gen} debitată de toate sursele din rețea

$$Q_{\text{gen}} = \Im\{S_{\text{gen}}\} = \Im\left\{\sum_{k=1}^L \mathcal{A} \underline{E}_k \cdot \underline{I}_k^* + \sum_{k=1}^L \mathcal{A} \underline{U}_{gk} \cdot \underline{I}_{gk}^*\right\} \quad (3.7.12)$$

este egală cu puterea reactivă $Q_{\text{bob,cond}}$ corespunzătoare tuturor bobinelor și condensatoarelor rețelei

$$Q_{\text{bob,cond}} = \sum_{k=1}^L \left(\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k}\right) \cdot I_k^2 + \sum_{\substack{k,s=1 \\ k < s}}^L 2\omega L_{ks} \cdot \Re\{\underline{I}_s \cdot \underline{I}_k^*\} \quad (3.7.13)$$

Subliniem că termenii $\underline{E}_k \cdot \underline{I}_k^*$ și $\underline{U}_{gk} \cdot \underline{I}_{gk}^*$ din sumele algebrice ale puterilor complexe corespunzătoare surselor de tensiune și, respectiv, de curent sunt afectați de semnul plus ori de semnul minus după cum sensurile mărimilor la borne corespund asocierii acestora după convenția de la generatoare ori după convenția de la receptoare (vezi figura 3.7.2).

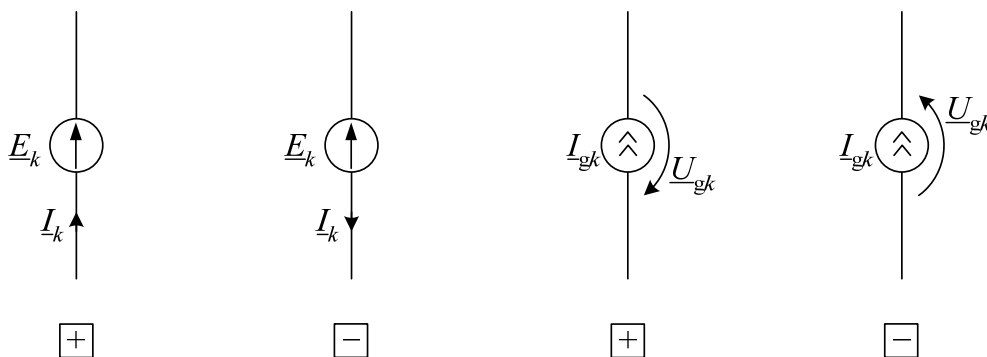


Figura 3.7.2

În relația (3.7.13) mărimea notată L_{ks} este inductivitatea mutuală dintre bobinele cu numerele de ordine k și s și ea este indicată prin **convenția bornelor polarizate**.

Semnul (plus ori minus) cu care această inductivitate intervine în termenul corespunzător din cea de-a doua sumă este dictat de modul în care curenții complecși \underline{I}_k și \underline{I}_s atacă bornele polarizate (marcate prin asteriscuri) ale bobinelor: plus dacă curenții \underline{I}_k și \underline{I}_s atacă în același fel (intră-intră sau iese-iese) bornele polarizate ale bobinelor k și, respectiv, s ori minus dacă curenții \underline{I}_k și \underline{I}_s atacă în feluri diferite (intră-iese sau iese-intră) bornele polarizate ale bobinelor k și, respectiv, s .

Cu ajutorul relațiilor

$$P_{\text{gen}} = P_{\text{rez}} \geq 0 \quad (3.7.14)$$

și

$$Q_{\text{gen}} = Q_{\text{bob,cond}} \geq 0 \quad (3.7.15)$$

se verifică **bilanțurile puterilor activă și, respectiv, reactivă pentru circuitele de curent alternativ izolate**.

3.8. Teoreme utilizate în studiul în complex al circuitelor de curent alternativ

Prima teoremă a lui Kirchhoff: „Pentru orice nod (n) al unei rețele electrice suma algebrică a simbolurilor complexe \underline{I}_k ale curenților laturilor care concură în acel nod este nulă:

$$\sum_{k \in (n)} \mathcal{A} \underline{I}_k = 0. \quad (3.8.1)$$

Caracterul algebric al sumei, marcat cu ajutorul simbolului \mathcal{A} plasat în vecinătatea semnului de sumă, este impus de **atribuirea semnului plus pentru curenții care ies din nodul (n) și, respectiv, semnul minus pentru curenții care intră în acel nod**.

A doua teoremă a lui Kirchhoff: „Oricare ar fi un contur închis $[\Gamma]$, suma algebrică a simbolurilor complexe \underline{U}_k ale tensiunilor de-a lungul acelu contur este nulă:

$$\sum_{k \in [\Gamma]} \mathcal{A} \underline{U}_k = 0. \quad (3.8.2)$$

Caracterul algebric al sumei, marcat și de această dată cu ajutorul simbolului \mathcal{A} plasat în vecinătatea semnului de sumă, este impus de necesitatea parcurgerii conturului închis într-un anumit sens (arbitrar) și **atribuirea semnului plus tensiunilor al căror sens coincide cu sensul de parcurgere, respectiv a semnului minus tensiunilor al căror sens este opus sensului de parcurgere.**

Cum o buclă $[b]$ de rețea este un contur închis și cum fiecare latură componentă a acesteia poate conține în principiu elemente ideale pasive (rezistoare de rezistențe R_k , bobine de inductivități proprii L_k cuplate mutual cu bobine de inductivități proprii L_s – inductivitățile mutuale L_{ks} fiind indicate prin convenția bornelor polarizate – și condensatoare de capacități C_k) și surse ideale (de tensiuni electromotoare complexe \underline{E}_k , respectiv curenți electromotori complecși \underline{I}_{gk}), relația 3.8.2 poate fi adusă sub forma

$$\sum_{k \in [b]} \mathcal{A} (\underline{Z}_k \cdot \underline{I}_k + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}} \mathcal{A} \underline{Z}_{ks} \cdot \underline{I}_s) + \sum_{k \in [b]} \mathcal{A} \underline{U}_{gk} = \sum_{k \in [b]} \mathcal{A} \underline{E}_k, \quad (3.8.3)$$

unde

$$\underline{Z}_k = R_k + j\omega L_k - j \frac{1}{\omega C_k} \quad (3.8.4)$$

este impedanța complexă proprie a laturii cu numărul de ordine k , iar

$$\underline{Z}_{ks} = \underline{Z}_{sk} = j\omega L_{ks} = j\omega L_{sk} \quad (3.8.5)$$

este impedanța complexă mutuală dintre bobinele cu numerele de ordine k și s .

Teorema de echivalență între o sursă reală de tensiune și o sursă reală de curent: „O sursă reală de tensiune (SRT) admite o sursă reală de curent (SRC) echivalentă și reciproc (vezi figura 3.8.1) în condițiile în care cele

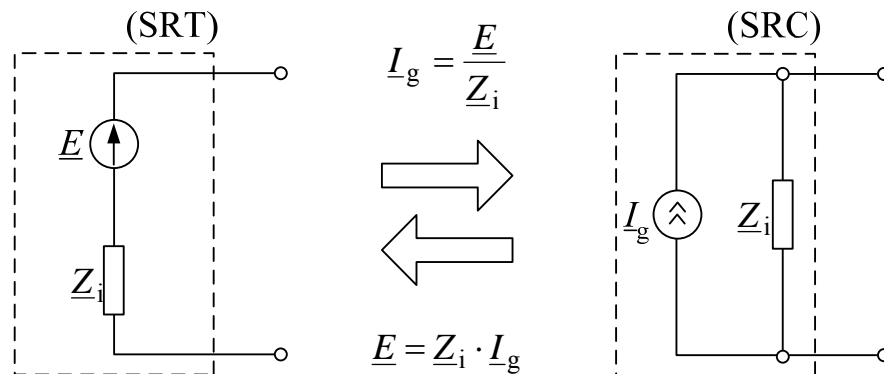


Figura 3.8.1

două surse reale au aceeași impedanță complexă internă \underline{Z}_i , iar între parametrii complecși tensiune electromotoare \underline{E} și curent electromotor \underline{I}_g există relația

$$\underline{E} = \underline{Z}_i \cdot \underline{I}_g \quad ; \quad \left(\underline{I}_g = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_i} \right) \quad (3.8.6)$$

Această teoremă va fi folosită în continuare și sub denumirea de **teorema de echivalență între un dipol activ $\underline{E}, \underline{Z}$ serie și un dipol activ $\underline{I}_g, \underline{Z}$ paralel.**

Teorema transferului maxim de putere activă: „O sursă reală de tensiune, caracterizată prin valoarea efectivă a tensiunii electromotoare $E = |\underline{E}|$, rezistența internă $R_i = \Re\{\underline{Z}_i\}$ și reactanța internă $X_i = \Im\{\underline{Z}_i\}$, care lucrează pe o sarcină variabilă având rezistența R și reactanța X , transferă sarcinii o putere activă maximă atunci când sunt îndeplinite simultan condițiile: rezistența sarcinii R este egală cu rezistența internă R_i a sursei și reactanța sarcinii X este egală dar de semn opus cu reactanța internă X_i a sursei. Puterea activă maximă este

$$P_{\max} = \frac{E^2}{4R_i} \quad (3.8.7)$$

și se spune că **sarcina este adaptată la sursă**”.

Teorema de echivalență a impedanțelor complexe conectate în serie:
 „ n impedanțe complexe $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_n$ conectate în serie în raport cu două borne (A) și (B) admit în raport cu acele două borne o impedanță complexă echivalentă

$$\underline{Z}_{es} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k \quad .” \quad (3.8.8)$$

Teorema de echivalență a impedanțelor complexe conectate în paralel:
 „ n impedanțe complexe $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_n$ conectate în paralel în raport cu două borne (A) și (B) admit în raport cu acele două borne o impedanță complexă echivalentă

$$\frac{1}{\underline{Z}_{ep}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_k} \quad .” \quad (3.8.9)$$

Teoremele de transfigurare stea-triunghi și triunghi-stea (figura 3.8.2)

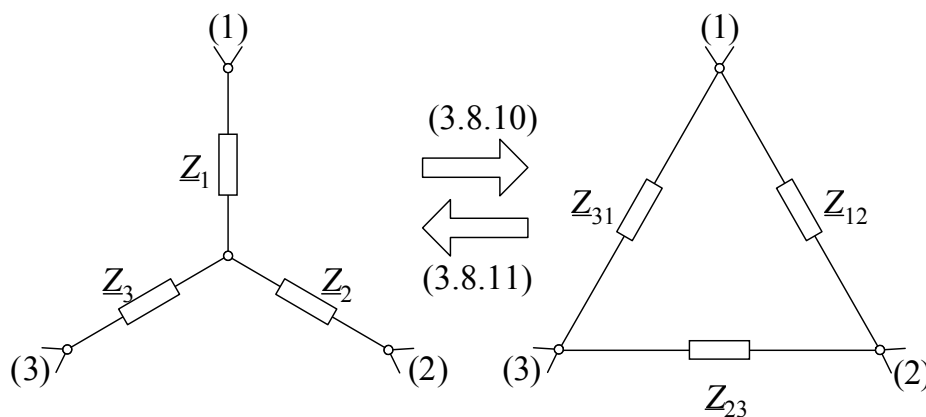


Figura 3.8.2

„Orice tripol pasiv alcătuit din impedanțele complexe $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ conectate în stea admite un tripol pasiv echivalent alcătuit din impedanțele complexe $\underline{Z}_{12}, \underline{Z}_{23}, \underline{Z}_{31}$ conectate în triunghi care au valorile:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} \\ \underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \\ \underline{Z}_{31} = \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \end{cases} \quad (3.8.10)$$

La rândul său, orice tripol pasiv alcătuit din impedanțele complexe $\underline{Z}_{12}, \underline{Z}_{23}, \underline{Z}_{31}$ conectate în triunghi admite un tripol pasiv echivalent alcătuit din impedanțele complexe $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ conectate în stea care au valorile:

$$\begin{cases} \underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \\ \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{23} \cdot \underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \\ \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{31} \cdot \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \end{cases} \quad (3.8.11)$$

Teorema superpoziției:

„Intensitatea curentului electric prin orice latură a unei rețele **liniare și active** (cu surse de tensiune și de curent) este suma algebrică a intensităților curenților pe care i-ar stabili în acea latură fiecare dintre surse dacă s-ar găsi doar ea în circuit, celelalte surse fiind **pasivizate**.”

Operațiunea de pasivizare a unei surse constă în substituirea acesteia cu impedanța sa complexă internă. Întrucât impedanța complexă internă a unei surse ideale de tensiune este zero, iar admitanța complexă internă a unei surse ideale de curent este zero, rezultă că **operațiunea de pasivizare a unei surse ideale de tensiune constă în substituirea acesteia cu un scurtcircuit, în timp ce operațiunea de pasivizare a unei surse ideale de curent constă în substituirea acesteia cu un gol.**

Teorema lui Vashy pentru surse de tensiune (prima teoremă a lui Vashy): „Distribuția de curenți și de tensiuni pentru toate elementele dipolare ale unui circuit nu se modifică dacă se introduc în serie cu toate elementele conectate la un nod, oricare, al circuitului, surse ideale de tensiune având tensiuni electromotoare egale și la fel orientate față de nodul respectiv.”

Teorema lui Vashy pentru surse de curent (a doua teoremă a lui Vashy): „Distribuția de curenți și de tensiuni pentru toate elementele dipolare ale unui circuit nu se modifică dacă se introduc în paralel cu toate laturile ce alcătuiesc un ochi, oricare, al circuitului, surse ideale de curent injectând curenți egali și la fel orientați în raport cu un sens arbitrar de parcurgere a buclei respective.”

Subliniem însă faptul că **prin utilizarea primei teoreme a lui Vashy se modifică tensiunile laturilor afectate de sursele ideale de tensiune nou introduse, iar prin utilizarea celei de-a doua teoreme a lui Vashy se modifică curenții laturilor afectate de sursele ideale de curent nou introduse.**

Teorema generatorului echivalent de tensiune (teorema Helmholtz-Thévenin) permite calculul curentului complex \underline{I}_{AB} ce străbate o impedanță complexă \underline{Z}_{AB} conectată între două borne (A) și (B), oricare, ale unei rețele liniare și active, cu ajutorul relației

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB\text{gol}}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{AB0}}. \quad (3.8.12)$$

În această relație \underline{Z}_{AB0} reprezintă impedanța complexă echivalentă a rețelei pasivizate în raport cu bornele (A) și (B) după eliminarea impedanței complexe \underline{Z}_{AB} , iar $\underline{U}_{AB\text{gol}}$ reprezintă tensiunea complexă de mers în gol, adică simbolul complex al tensiunii care se stabilește între bornele (A) și (B) atunci când impedanța complexă \underline{Z}_{AB} este eliminată (sau când curentul prin ea este nul), restul rețelei active nefiind modificat.

Teorema generatorului echivalent de curent (teorema lui Norton) permite calculul tensiunii complexe \underline{U}_{AB} la bornele unei impedanțe complexe \underline{Z}_{AB} conectate între două borne (A) și (B), oricare, ale unei rețele liniare și active, cu ajutorul relației

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{AB\text{sc}}}{\underline{Y}_{AB} + \underline{Y}_{AB0}}, \quad (3.8.13)$$

în care $\underline{Y}_{AB} = \underline{Z}_{AB}^{-1}$, \underline{Y}_{AB0} reprezintă admitanța complexă echivalentă a rețelei pasivizate în raport cu bornele (A) și (B) după eliminarea impedanței complexe \underline{Z}_{AB} (deci $\underline{Y}_{AB0} = \underline{Z}_{AB0}^{-1}$), iar $\underline{I}_{AB\text{sc}}$ reprezintă curentul complex de scurtcircuit

(simbolul complex al curentului care străbate un scurtcircuit realizat între bornele (A) și (B) atunci când restul rețelei active rămâne nemodificat).

Calculul impedanței complexe \underline{Z}_{AB0} se poate face prin una dintre următoarele metode:

- utilizarea teoremelor de echivalență serie-paralel și/sau stea-triunghi ale impedanțelor complexe;
- determinarea mărimilor complexe \underline{U}_{ABgol} și \underline{I}_{ABsc} și utilizarea relației

$$\underline{Z}_{AB0} = \frac{\underline{U}_{ABgol}}{\underline{I}_{ABsc}}; \quad (3.8.14)$$

- folosirea **metodei de determinare a impedanței complexe de intrare a circuitelor electrice**, care constă în următoarele:

- alimentarea rețelei pasivizate (după eliminarea impedanței complexe \underline{Z}_{AB}) pe la bornele (A) și (B) cu o sursă ideală; în funcție de facilitățile pe care le asigură, aceasta poate fi o sursă ideală de tensiune având tensiunea electromotoare complexă \underline{E} care va fi străbătută de curentul complex \underline{I} sau de o sursă ideală de curent având curentul electromotor complex \underline{I}_g care va avea la borne o tensiune complexă \underline{U}_g ; în oricare dintre situații, **mărimile tensiune și curent la bornele sursei ideale vor fi asociate conform convenției de la generatoare**;
- scrierea ecuațiilor în complex corespunzătoare teoremelor lui Kirchhoff (sau altor metode) pentru circuitul pasivizat alimentat pe la bornele (A) și (B) cu sursa ideală aleasă;
- eliminarea succesivă a curenților și tensiunilor laturilor pasive, în scopul determinării relației liniare și omogene care leagă mărimile complexe \underline{E} și \underline{I} , respectiv \underline{I}_g și \underline{U}_g ;
- calculul impedanței complexe de intrare a circuitului (care în cazul de față coincide cu \underline{Z}_{AB0}) cu una dintre relațiile

$$\underline{Z}_{AB0} = \frac{\underline{E}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_g}{\underline{I}_g}. \quad (3.8.15)$$

Teorema substituției

„Orice element dipolar de circuit, străbătut de un curent complex \underline{I} și având la borne o tensiune complexă \underline{U} cu valori și sensuri precizate, poate fi **substituit** fie cu o sursă ideală de tensiune, fie cu o sursă ideală de curent (vezi figura 3.8.3) care să asigure ecuațiile de funcționare $\underline{E} = \underline{U}$ și, respectiv, $\underline{I}_g = \underline{I}$ și să nu modifice regimul energetic al acestuia.”

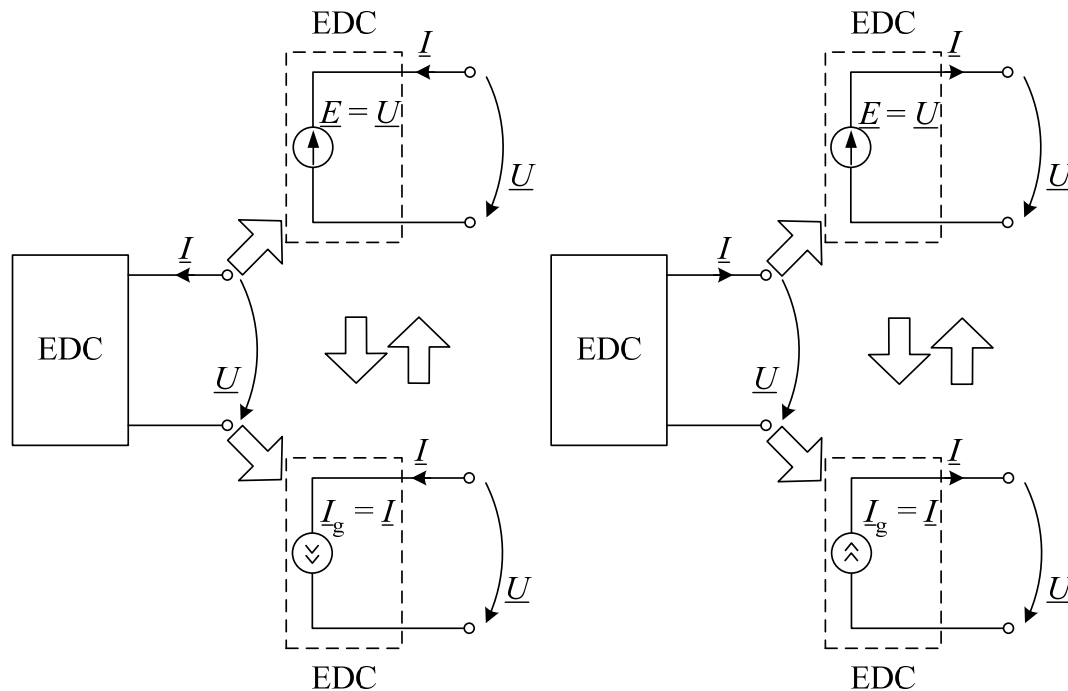


Figura 3.8.3

Se remarcă faptul că această teoremă dă posibilitatea substituirii surselor ideale de tensiune și de curent între ele, însă **substituția nu se poate efectua decât într-o rețea dată și pentru un punct de funcționare ($\underline{I}; \underline{U}$) precizat**.

Dacă dipolul este pasiv, atunci el poate fi substituit cu o sursă ideală de tensiune sau de curent pentru care mărimile la borne – tensiune complexă și curent complex – vor fi asociate conform convenției de la receptoare.

3.9. Metode sistematice de rezolvare în complex a circuitelor de curent alternativ

Se consideră o rețea cu o structură topologică precizată, conținând elemente ideale, izolată și neconexă, cu S subrețele, cu L laturi și N noduri, pentru care sunt cunoscute tensiunile electromotoare complexe \underline{E}_k ale tuturor

surselor ideale de tensiune, curenții electromotori \underline{I}_{gk} ai tuturor surselor ideale de curent (fie \underline{L}_g numărul acestora din urmă), impedanțele complexe echivalente \underline{Z}_k ale tuturor laturilor și impedanțele complexe $\underline{Z}_{ks} = \underline{Z}_{sk}$ corespunzătoare tuturor cuplajelor (marcate prin convenția bornelor polarizate).

O metodă sistematică de rezolvare a unei astfel de rețele este o metodă aplicabilă oricare ar fi configurația topologică a respectivei rețele și oricare ar fi parametrii complecși dați ai acesteia (într-o formulare corectă și completă a problemei, care să nu fie nici incompatibilă, nici nedeterminată).

Metoda teoremelor lui Kirchhoff

Metoda teoremelor lui Kirchhoff permite determinarea celor $L - L_g$ curenți complecși \underline{I}_k ai laturilor care nu conțin surse ideale de curent și a celor L_g tensiuni complexe \underline{U}_{gk} la bornele surselor ideale de curent.

Așa după cum s-a arătat în paragraful 3.8, formele complexe ale celor două teoreme ale lui Kirchhoff sunt

$$\begin{cases} \sum_{k \in (n)} \mathcal{A} \underline{I}_k = 0 \\ \sum_{k \in [b]} \mathcal{A} (\underline{Z}_k \cdot \underline{I}_k + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}} \mathcal{A} \underline{Z}_{ks} \cdot \underline{I}_s) + \sum_{k \in [b]} \mathcal{A} \underline{U}_{gk} = \sum_{k \in [b]} \mathcal{A} \underline{E}_k, \end{cases} \quad (3.9.1)$$

în care o parte dintre curenții \underline{I}_k (și anume cei L_g curenți \underline{I}_{gk}) sunt cunoscuți conform ecuațiilor de funcționare ale surselor ideale de curent.

Unicitatea soluției acestui sistem în condițiile liniarității ecuațiilor (3.9.1) în necunoscutele \underline{I}_k și \underline{U}_{gk} (necunoscute al căror număr total este L) este asigurată de scrierea unui număr de L ecuații independente, Euler demonstrând că **numărul de ecuații independente de tip Kirchhoff I este $N - S$, iar numărul de ecuații independente de tip Kirchhoff II este $L - N + S$.**

Remarcând că renunțarea la S dintre nodurile rețelei (câte unul pentru fiecare subrețea) nu prezintă nici o dificultate și că un sistem de bucle fundamentale asigură cerințele de independență ale acestora (generarea lor realizându-se relativ simplu cu ajutorul algoritmului prezentat în paragraful 1.1 pentru oricare subrețea), se poate merge și mai departe cu organizarea sistemului de L ecuații cu L necunoscute (dintre care $L - L_g$ curenți complecși \underline{I}_k și L_g tensiuni complexe \underline{U}_{gk}), după cum urmează:

Se alege configurația arborilor subrețelelor de așa manieră încât să nu conțină laturi-ramuri cu generatoare de curent și apoi se completează arborii, pe rând, cu câte o coardă, începând cu acelea care nu conțin surse de curent.

În acest fel sistemul de L ecuații independente va cuprinde un prim set de $L - L_g$ ecuații (dintre care $N - S$ de tip Kirchhoff I și $L - L_g - N + S$ de tip Kirchhoff II) în care apar numai cele $L - L_g$ necunoscute curenți complecși \underline{I}_k și un al doilea set de L_g ecuații în care apar și cele $L - L_g$ necunoscute tensiuni complexe \underline{U}_{gk} . Primele $L - L_g$ ecuații dau valorile celor $L - L_g$ necunoscute curenți complecși \underline{I}_k , iar aceștia odată determinați devin valori cunoscute în celelalte L_g ecuații în care rămân ca necunoscute doar tensiunile complexe \underline{U}_{gk} . Mai mult, fiecare dintre aceste ultime L_g ecuații conține doar câte una dintre necunoscutele \underline{U}_{gk} , fapt care ușurează considerabil efortul de calcul.

Observații

1. Odată alese sensurile (arbitrare) de referință pentru cele L mărimi necunoscute și sensul de parcurgere al unei bucle [b], este recomandabil să se parcurgă această buclă de trei ori, urmărindu-se pe rând elementele pasive, sursele ideale de curent și apoi sursele ideale de tensiune, pentru stabilirea semnelor diverșilor termeni.

2. Este util ca termenii din prima sumă algebrică din membrul stâng al ecuațiilor de tip Kirchhoff II să fie grupați în paranteze corespunzătoare laturilor care alcătuiesc bucla respectivă. Paranteza care cuprinde tensiunile complexe aferente laturii cu numărul de ordine k va fi luată cu semnul plus sau cu semnul minus după cum sensul ales arbitrar curentului \underline{I}_k va coincide sau nu cu sensul de parcurgere al buclei.

În interiorul acestei paranteze vor exista, în principiu, termenii corespunzători căderilor de tensiune rezistivă, capacitivă și inductivă proprie exprimați prin tensiunea complexă $\underline{Z}_k \cdot \underline{I}_k$ precum și termenii corespunzători căderilor de tensiune complexe induse $\underline{Z}_{ks} \cdot \underline{I}_s$. Cei din urmă vor fi afectați de semnul plus sau de semnul minus după cum curenții \underline{I}_k și \underline{I}_s atacă în același mod sau în moduri diferite bornele polarizate ale bobinelor de inductivități proprii L_k și, respectiv, L_s .

3. Dacă se dorește determinarea unei tensiuni complexe \underline{U}_{AB} între oricare două puncte (A) și (B) ale unei subrețele, atunci se va scrie o ecuație de tip Kirchhoff II suplimentară, pentru un contur $[\Gamma]$ alcătuit din laturi sau

porțiuni de laturi ale subrețelei (ales de preferință astfel încât să conțină cât mai puține elemente) și închis de tensiunea \underline{U}_{AB} ; această ecuație va fi de forma

$$\sum_{k \in [\Gamma]} \mathcal{A} (\underline{Z}_k \cdot \underline{I}_k + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}} \mathcal{A} \underline{Z}_{ks} \cdot \underline{I}_s) + \sum_{k \in [\Gamma]} \mathcal{A} \underline{U}_{gk} \pm \underline{U}_{AB} = \sum_{k \in [\Gamma]} \mathcal{A} \underline{E}_k, \quad (3.9.2)$$

în care tensiunea complexă \underline{U}_{AB} va fi luată de semnul plus sau de semnul minus după cum sensul ei de referință coincide sau nu coincide cu sensul arbitrar de parcurgere al conturului închis $[\Gamma]$.

4. Pentru un circuit fără cuplaje magnetice $\underline{Z}_{ks} = \underline{Z}_{sk} = 0$ pentru orice k și orice s , cu $s \neq k$.

Metoda curenților ciclici

Această metodă utilizează un set de necunoscute primare auxiliare – **curenții ciclici complecși** (numiți și **curenți de buclă** sau **de contur** și notați \underline{I}'_h) care sunt niște curenți de calcul (fictivi) atașați câte unul pentru fiecare dintre cele $L - N + S$ bucle fundamentale ale rețelei studiate. Ei sunt definiți ca având proprietatea de a străbate cu o aceeași valoare toate laturile care alcătuiesc bucla respectivă. În acest fel, **prin superpoziție, un curent complex \underline{I}_k prin oricare dintre laturile circuitului este suma algebrică a curenților ciclici care trec prin acea latură**

$$\underline{I}_k = \sum_{h=1}^{L-N+S} \mathcal{A} \underline{I}'_h \quad (3.9.3)$$

și, ca atare, în cazul particular în care o latură este parcursă de un singur curent ciclic acesta este egal cu curentul acelei laturi.

Dacă rețeaua studiată nu conține surse de curent, atunci cei $L - N + S$ curenți ciclici complecși \underline{I}'_h satisfac sistemul

$$\begin{cases} \underline{Z}_{1,1} \cdot \underline{I}'_1 + \underline{Z}_{1,2} \cdot \underline{I}'_2 + \dots + \underline{Z}_{1,L-N+S} \cdot \underline{I}'_{L-N+S} = \underline{E}'_1 \\ \underline{Z}_{2,1} \cdot \underline{I}'_1 + \underline{Z}_{2,2} \cdot \underline{I}'_2 + \dots + \underline{Z}_{2,L-N+S} \cdot \underline{I}'_{L-N+S} = \underline{E}'_2 \\ \vdots \\ \underline{Z}_{L-N+1,1} \cdot \underline{I}'_1 + \underline{Z}_{L-N+1,2} \cdot \underline{I}'_2 + \dots + \underline{Z}_{L-N+1,L-N+S} \cdot \underline{I}'_{L-N+S} = \underline{E}'_{L-N+S} \end{cases} \quad (3.9.4)$$

în care, pentru orice $p, q \in \{1, 2, \dots, L - N + S\}$:

- coeficienții \underline{Z}_{pp} reprezintă suma impedanțelor complexe de pe laturile care formează bucla cu numărul de ordine p la care se adaugă suma dublului impedanțelor complexe de cuplaj corespunzătoare bobinelor cuplate din laturi făcând parte din acea buclă; fiecare dintre termenii acestei ultime sume se ia cu semnul plus sau cu semnul minus după cum curentul ciclic complex \underline{I}'_p atacă în același mod sau în moduri diferite bornele polarizate ale bobinelor cuplate;
- coeficienții $\underline{Z}_{pq} = \underline{Z}_{qp}$ reprezintă suma impedanțelor complexe de pe laturile comune buclelor având numerele de ordine p și q (sumă luată cu semnul plus sau minus după cum curenții ciclici complecși \underline{I}'_p și \underline{I}'_q străbat acele laturi în același sens sau în sensuri opuse), la care se adaugă suma algebrică a impedanțelor complexe de cuplaj corespunzătoare bobinelor cuplate din laturi făcând parte una din bucla p , iar cealaltă din bucla q ; fiecare dintre termenii acestei ultime sume se ia la rândul său cu semnul plus sau cu semnul minus după cum curenții ciclici complecși \underline{I}'_p și \underline{I}'_q atacă în același mod sau în moduri diferite bornele polarizate ale bobinelor cuplate considerate;
- coeficienții \underline{E}'_p reprezintă suma algebrică a tensiunilor electromotoare complexe corespunzătoare surselor ideale de tensiune de pe laturile aparținând buclei cu numărul de ordine p (luate cu semnul plus dacă sensurile săgeților tensiunilor electromotoare coincid cu sensul arbitrar ales pentru curentul ciclic complex \underline{I}'_p și, respectiv, cu semnul minus în caz contrar).

Dacă rețeaua studiată conține și L_g laturi cu surse ideale de curent, atunci se poate proceda în unul dintre următoarele două moduri:

1. Se generează buclele fundamentale optându-se pentru arbori care să nu conțină laturi-ramuri cu generatoare ideale de curent. Prin completarea acestora, pe rând, cu câte o coardă începând cu acele corzi care nu conțin generatoare ideale de curent, sistemul de $L - N + S$ ecuații pe care îl satisfac curenții ciclici va conține:

- un set de $L - L_g - N + S$ ecuații (corespunzătoare buclelor fundamentale care nu conțin laturi cu surse ideale de curent) de forma (3.9.4);

- un set de L_g ecuații (corespunzătoare buclelor fundamentale care conțin câte o latură cu sursă ideală de curent) de forma

$$\underline{I}'_h = \underline{I}_{gm}, \quad (3.9.5)$$

pentru $h = L - L_g - N + S + 1, L - L_g - N + S + 2, \dots, L - N + S,$

relații aferente tuturor celor L_g curenți complecși \underline{I}'_h și justificate de faptul că fiecare dintre laturile cu surse ideale de curent este parcursă de către un singur curent ciclic complex \underline{I}'_h a cărui orientare va fi luată în sensul curentului electromotor \underline{I}_{gm} .

Introducând cele L_g valori cunoscute \underline{I}_{gm} în primele $L - N + S - L_g$ ecuații, efortul de calcul scade în mod simțitor.

Mai rămân de determinat cele L_g necunoscute tensiunile complexe la bornele surselor ideale de curent care, după aflarea curenților complecși ai laturilor, se găsesc fără dificultate utilizând pe contururi închise convenabil alese cea de-a doua teoremă a lui Kirchhoff (recomandabil pentru bucle care nu conțin decât câte o sursă ideală de curent).

2. Se utilizează teorema substituției, înlocuindu-se sursele ideale de curent cu surse ideale de tensiune. În acest fel apar L_g necunoscute suplimentare (tensiunile electromotoare complexe ale noilor surse, care nu reprezintă altceva decât tensiunile complexe la bornele surselor ideale de curent substituite), dar și L_g noi ecuații de forma (3.9.4) dacă se optează pentru algoritmul de generare a sistemului de bucle fundamentale în care arborii care să nu aibă laturi-ramuri care înainte de substituție conțineau surse ideale de curent și dacă sensul curentului ciclic coincide prin latura cu numărul de ordine m cu sensul curentului electromotor \underline{I}_{gm} .

Și în cadrul acestei metode, pentru circuitele conexe $S = 1$, iar pentru circuitele fără cuplaje $\underline{Z}_{ks} = \underline{Z}_{sk} = 0$ pentru orice s și orice k , cu $s \neq k$.

Metoda potențialelor nodurilor

Vom prezenta această metodă pentru cazul în care circuitul studiat este unul izolat, conex ($S = 1$) și lipsit de bobine cuplate magnetic. Metoda potențialelor nodurilor utilizează un set de necunoscute auxiliare – **potențialele complexe** $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \dots, \underline{V}_{N-1}$ **ale celor $N - 1$ noduri independente ale rețelei**, în raport cu potențialul celui de-al n -lea nod ales ca referință ($\underline{V}_N = 0$). Odată cunoscute aceste potențiale complexe, se determină tensiunile complexe la bornele laturilor având ca extremități nodurile (n_p) și (n_q) cu relațiile

$$\underline{U}_{pq} = \underline{V}_p - \underline{V}_q$$

și, în continuare, în ordine, utilizând ecuațiile de funcționare în complex ale laturilor (care rezultă din ecuațiile de funcționare în complex ale elementelor dipolare de circuit și teorema a doua a lui Kirchhoff), se obțin curenții complecși ai laturilor și tensiunile complexe la bornele surselor ideale de curent.

Dacă avem de-a face cu un circuit în care nu există nici o latură care să conțină doar o sursă ideală de tensiune, potențialele complexe $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \dots, \underline{V}_{N-1}$ satisfac sistemul

$$\begin{cases} \underline{Y}_{1,1} \cdot \underline{V}_1 + \underline{Y}_{1,2} \cdot \underline{V}_2 + \dots + \underline{Y}_{1,N-1} \cdot \underline{V}_{N-1} = \underline{I}_{sc1} \\ \underline{Y}_{2,1} \cdot \underline{V}_1 + \underline{Y}_{2,2} \cdot \underline{V}_2 + \dots + \underline{Y}_{2,N-1} \cdot \underline{V}_{N-1} = \underline{I}_{sc2} \\ \vdots \\ \underline{Y}_{N-1,1} \cdot \underline{V}_1 + \underline{Y}_{N-1,2} \cdot \underline{V}_2 + \dots + \underline{Y}_{N-1,N-1} \cdot \underline{V}_{N-1} = \underline{I}_{sc N-1} \end{cases} \quad (3.9.6)$$

în care:

- coeficienții $\underline{Y}_{p,p}$ reprezintă suma admitanțelor complexe ale laturilor care concură în nodul cu numărul de ordine p ;
- coeficienții $\underline{Y}_{p,q} = \underline{Y}_{q,p}$ reprezintă suma admitanțelor complexe ale laturilor care leagă nodurile cu numerele de ordine p și q , **sumă luată cu semnul minus**;
- coeficienții $\underline{I}_{sc p}$ reprezintă injecția complexă totală de curent în nodul cu numărul de ordine p și se calculează ca sumă algebrică a curenților complecși de scurtcircuit ai laturilor care concură în acel nod, curenți complecși de scurtcircuit luați cu semnul plus atunci când intră în nod și, respectiv, cu semnul minus atunci când ies din nod (contribuțiile diverselor laturi la injecția totală de curent într-un nod se determină prin câte o izolare fictivă a fiecăreia dintre aceste laturi și scurtcircuitarea bornelor sale).

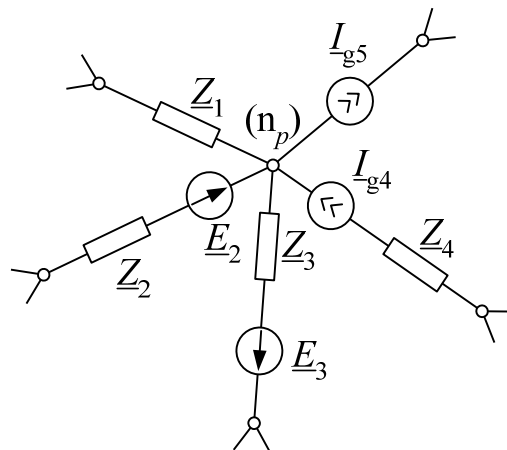


Figura 3.9.1

În cazul nodului (n_p) din figura 3.9.1, valorile parametrilor $\underline{Y}_{p,p}$ și $\underline{I}_{sc p}$ sunt:

$$\underline{Y}_{p,p} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + 0 + 0 = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 \quad (3.9.7)$$

(întrucât admitanțele complexe interne ale surselor ideale de curent sunt nule) și, respectiv,

$$\underline{I}_{sc p} = 0 + \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2} - \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_3} + \underline{I}_{g4} - \underline{I}_{g5} = \underline{Y}_2 \cdot \underline{E}_2 - \underline{Y}_3 \cdot \underline{E}_3 + \underline{I}_{g4} - \underline{I}_{g5}. \quad (3.9.8)$$

Se remarcă faptul că existența unor laturi care conțin numai câte o sursă ideală de tensiune vine în contradicție cu restricția de funcționare în scurtcircuit a unei astfel de surse care nu permite definirea unui curent de scurtcircuit. În consecință, metoda potențialelor nodurilor are neajunsul de a nu putea fi aplicată în forma prezentată anterior pentru circuite având laturi care conțin numai câte o sursă ideală de tensiune. Problema poate fi totuși rezolvată și în această situație utilizându-se unul din următoarele procedee.

1. Se substituie sursele ideale de tensiune cu surse ideale de curent. În acest fel, pentru fiecare latură având ca extremități nodurile (n_p) și (n_q) și conținând numai sursa ideală de tensiune electromotoare complexă \underline{E}_{pq} apare o necunoscută suplimentară - curentul electromotor complex \underline{I}_{gpq} , dar și o ecuație în plus, de forma

$$\underline{V}_p - \underline{V}_q = \pm \underline{E}_{pq},$$

semnul plus ori minus fiind dictat de sensul săgeții tensiunii electromotoare, în acord cu ecuația de funcționare corespunzătoare.

2. Se pasivizează laturile care conțin numai surse ideale de tensiune prin utilizarea potrivită a primei teoreme a lui Vashy. Fiecare dintre acestea devine câte un scurtcircuit ale cărui noduri-extremități pot fi „strânse” din punct de vedere al potențialelor lor într-unul singur. Circuitul nou creat are în acest fel, corespunzător fiecărei surse ideale de tensiune pasivizate, câte o latură și câte un nod mai puțin decât circuitul inițial, dar curenții laturilor omoloage ale celor două circuite sunt identici. După calculul acestora, se revine la circuitul inițial pentru determinarea curenților laturilor care conțin numai surse ideale de tensiune și a tensiunilor la bornele surselor ideale de curent.

3. În cazul particular în care **rețeaua studiată conține mai multe laturi având numai surse ideale de tensiune** (de tensiuni electromotoare complexe \underline{E}_{pq} , $p = 1, 2, \dots, M$) și **toate aceste laturi converg într-un același nod** (n_q), **atunci se alege ca referință a potențialelor acel nod comun**. În acest fel,

potențialele complexe \underline{V}_p ale celorlalte noduri extremități ale acelor laturi devin cunoscute:

$$\underline{V}_p = \pm \underline{E}_{pq}; p = 1, 2, \dots, M$$

(semnul plus sau minus fiind dictat de orientările săgeților tensiunilor electromotoare, în acord cu ecuațiile de funcționare ale surselor) și numărul de ecuații al sistemului (3.9.6) se reduce în consecință.

În finalul prezentării metodelor sistematice de analiză a circuitelor de curent alternativ, vom reține că metoda curenților ciclici și metoda potențialelor nodurilor sunt mai comode decât metoda teoremelor lui Kirchhoff întrucât sistemele liniare care trebuie rezolvate au grade mai mici decât L .

Mai mult, așa după cum s-a arătat anterior, dacă rețeaua studiată conține laturi cu surse ideale de curent și/sau laturi având în componență numai surse ideale de tensiune, o parte dintre necunoscutele aferente acestor două metode se găsesc direct.

Aplicația 3.1.

Pentru circuitul ilustrat în figura 3.1,a se cunosc valorile $R_1 = 15 [\Omega]$, $R_2 = 15 [\Omega]$, $R_3 = 10 [\Omega]$, $R_4 = 10 [\Omega]$, $\omega L_3 = \omega L_4 = \omega L_6 = 10 [\Omega]$ și $\frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{\omega C_2} = 5 [\Omega]$, precum și expresiile instantanee:

$$e_1(t) = 40 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) [\text{V}], \quad e_2(t) = 40 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) [\text{V}],$$

$$e_5(t) = 10\sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) [\text{V}], \quad i_g(t) = \sqrt{2} \cdot \sin \omega t [\text{A}].$$

Cerințe:

1. Să se scrie ecuațiile corespunzătoare metodei teoremelor lui Kirchhoff.
2. Să se scrie ecuațiile corespunzătoare metodei curenților ciclici.
3. Să se scrie ecuațiile corespunzătoare metodei potențialelor nodurilor.
4. Să se determine curenții laturilor, tensiunea la bornele sursei ideale de curent și tensiunea între punctele (A) și (B), atât în complex, cât și în instantaneu.
5. Să se construiască o diagramă fazorială de tensiuni care să reflecte cea de-a doua teoremă a lui Kirchhoff pentru o buclă conținând și latura cu sursa de curent.
6. Să se verifice bilanțurile puterilor activă și, respectiv, reactivă.

Soluție. Remarcăm că avem de-a face cu o rețea izolată, conexă ($S = 1$) și fără cuplaje magnetice, cu $L = 6$ laturi (dintre care $L_g = 1$ posedând o sursă de curent) și $N = 4$ noduri, care este ilustrată în complex în figura 3.31,b și care este caracterizată prin mărimile complexe $\underline{Z}_1 = 15 - 5j$, $\underline{Z}_2 = 15 - 5j$, $\underline{Z}_3 = 10 + 10j$, $\underline{Z}_4 = 10 + 10j$, $\underline{Z}_6 = 10j$ (cu modulele exprimate în $[\Omega]$), $\underline{I}_g = 1$ (cu modulul exprimat în $[A]$), $\underline{E}_1 = 20 - 20j$, $\underline{E}_2 = 20 + 20j$, $\underline{E}_5 = -10j$ (cu modulele exprimate în $[V]$).

Alegând senzuri arbitrare pentru cele șase mărimi complexe necunoscute (cinci curenți - \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 , \underline{I}_4 și \underline{I}_5 și o tensiune - \underline{U}_g), în conformitate cu cele prezentate în paragraful 2.9 al lucrării, se vor scrie $N - 1 = 3$ ecuații de tip Kirchhoff I - de exemplu pentru nodurile (n_1) , (n_2) și (n_3) - și, respectiv, $B = L - N + 1 = 3$ ecuații de tip Kirchhoff II. Optând pentru arborele având

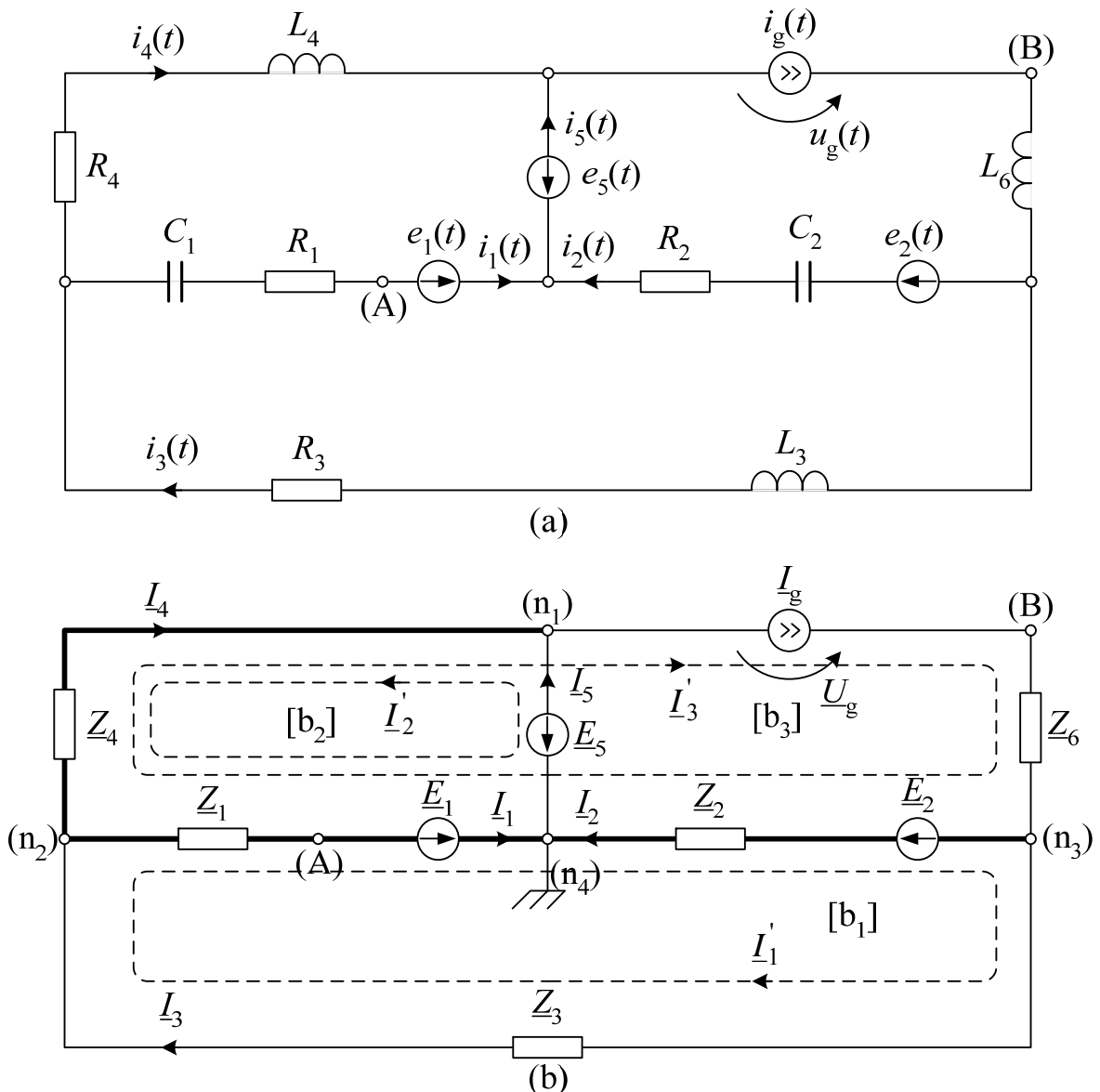


Figura 3.1

$R = N - 1 = 3$ ramuri marcat cu linie îngroșată și neconținând latura cu sursă de curent și completându-l, pe rând, cu câte una din cele $C = L - R = 3$ corzi, începând cu acelea care nu conțin surse de curent, se obține sistemul de bucle fundamentale notate $[b_1]$, $[b_2]$ și $[b_3]$.

Ecuțiile corespunzătoare metodei teoremelor lui Kirchhoff sunt:

$$\begin{array}{l} (n_1) \\ (n_2) \\ (n_3) \\ [b_1] \\ [b_2] \\ [b_3] \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -\underline{I}_4 - \underline{I}_5 + \underline{I}_g = 0 \\ +\underline{I}_1 - \underline{I}_3 + \underline{I}_4 = 0 \\ +\underline{I}_2 + \underline{I}_3 - \underline{I}_g = 0 \\ +\underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 - \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3 = +\underline{E}_1 - \underline{E}_2 \\ +\underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 - \underline{Z}_4 \cdot \underline{I}_4 = +\underline{E}_1 - \underline{E}_5 \\ -\underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_6 \cdot \underline{I}_g + \underline{Z}_4 \cdot \underline{I}_4 + \underline{U}_g = -\underline{E}_1 + \underline{E}_2. \end{array} \right.$$

Cele trei ecuații de tip Kirchhoff I împreună cu primele două ecuații de tip Kirchhoff II formează un sistem de cinci ecuații în necunoscutele \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 , \underline{I}_4 și \underline{I}_5 având soluția $\underline{I}_1 = 1 - j$, $\underline{I}_2 = 1 + j$, $\underline{I}_3 = -j$, $\underline{I}_4 = -1$, $\underline{I}_5 = 2$. Cu aceste valori, din ultima ecuație de tip Kirchhoff II, se obține $\underline{U}_g = 10j$.

Revenind în domeniul timp, expresiile instantanee căutate sunt:

$$i_1(t) = 2 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) [A], i_2(t) = 2 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) [A], i_3(t) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) [A],$$

$$i_4(t) = \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \pi) [A], i_5(t) = 2\sqrt{2} \cdot \sin \omega t [A] \text{ și}$$

$$u_g(t) = 10\sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) [V].$$

Corespunzătoare aceluiași arbore, sistemul de ecuații corespunzător metodei curenților ciclici (notați \underline{I}'_1 , \underline{I}'_2 , \underline{I}'_3 și atașați fiecareia dintre buclele fundamentale anterior generate, cu sensurile de referință alese, de exemplu, ca în figura 3.1,b) este

$$\begin{array}{l} [b_1] \\ [b_2] \\ [b_3] \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}'_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}'_2 + \underline{Z}_{13} \cdot \underline{I}'_3 = \underline{E}'_1 \\ \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}'_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}'_2 + \underline{Z}_{23} \cdot \underline{I}'_3 = \underline{E}'_2, \\ \underline{I}'_3 = \underline{I}_g = 1 \end{array} \right.$$

cu $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = 40$, $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_4 = 25 + 5j$, $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_1 = 15 - 5j$,
 $\underline{Z}_{13} = -(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = -30 + 10j$, $\underline{Z}_{23} = -(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4) = -25 - 5j$ și, respectiv, tensiunile electromotoare ciclice $\underline{E}'_1 = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 = -40j$ și $\underline{E}'_2 = \underline{E}_1 - \underline{E}_5 = 20 - 10j$.

Sistemul are soluția $\underline{I}'_1 = -j$, $\underline{I}'_2 = 2$, $\underline{I}'_3 = 1$, curenții complecși ai laturilor obținându-se prin superpoziția curenților ciclici complecși:

$$\underline{I}_1 = +\underline{I}'_1 + \underline{I}'_2 - \underline{I}'_3 = 1 - j,$$

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}'_1 + \underline{I}'_3 = 1 + j,$$

$$\underline{I}_3 = +\underline{I}'_1 = -j,$$

$$\underline{I}_4 = -\underline{I}'_2 + \underline{I}'_3 = -1,$$

$$\underline{I}_5 = +\underline{I}'_2 = 2.$$

Utilizarea metodei potențialelor nodurilor în maniera care va fi prezentată în continuare este impusă de existența unei laturi care conține **numai** o sursă ideală de tensiune. Din acest motiv se alege, de exemplu, nodul (n_4) ca referință a potențialelor ($\underline{V}_4 = 0$), caz în care $\underline{V}_1 = -\underline{E}_5$ (în conformitate cu ecuația de funcționare a sursei ideale de tensiune având tensiunea electromotoare \underline{E}_5), iar sistemul de ecuații corespunzător metodei potențialelor nodurilor este

$$\begin{cases} \underline{V}_1 = -\underline{E}_5 = 10j \\ \underline{Y}_{21} \cdot \underline{V}_1 + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{V}_2 + \underline{Y}_{23} \cdot \underline{V}_3 = \underline{I}_{sc2} \\ \underline{Y}_{31} \cdot \underline{V}_1 + \underline{Y}_{32} \cdot \underline{V}_2 + \underline{Y}_{33} \cdot \underline{V}_3 = \underline{I}_{sc3}, \end{cases}$$

în care

$$\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 = 0,16 - 0,08j, \quad \underline{Y}_{33} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + 0 = 0,11 - 0,03j,$$

$$\underline{Y}_{31} = 0, \quad \underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_4 = -0,05 + 0,05j,$$

$$\underline{Y}_{23} = \underline{Y}_{32} = -\underline{Y}_3 = -0,05 + 0,05j, \quad \underline{I}_{sc2} = -\underline{Y}_1 \cdot \underline{E}_1 = -1,6 + 0,8j.$$

$$\underline{I}_{sc3} = -\underline{Y}_2 \cdot \underline{E}_2 + \underline{I}_g = 0,2 - 1,6j,$$

Sistemul are soluția $\underline{V}_1 = 10j$, $\underline{V}_2 = -10$ și $\underline{V}_3 = -10j$, potențialele complexe având modulele exprimate în [V].

În continuare, pentru laturile cu numerele de ordine 1, 2, 3, 4 și 6, se exprimă tensiunile la bornele acestora în funcție de potențiale, de curenți și de tensiunea la bornele sursei de curent:

$$\underline{U}_{24} = \underline{V}_2 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 - \underline{E}_1,$$

$$\underline{U}_{34} = \underline{V}_3 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 - \underline{E}_2,$$

$$\underline{U}_{32} = \underline{V}_3 - \underline{V}_2 = \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3,$$

$$\underline{U}_{21} = \underline{V}_2 - \underline{V}_1 = \underline{Z}_4 \cdot \underline{I}_4,$$

$$\underline{U}_{13} = \underline{V}_1 - \underline{V}_3 = \underline{Z}_6 \cdot \underline{I}_g + \underline{U}_g,$$

rezultând $\underline{I}_1 = 1 - j$, $\underline{I}_2 = 1 + j$, $\underline{I}_3 = -j$, $\underline{I}_4 = -1$ și $\underline{U}_g = 10j$.

Pentru determinarea curentului laturii care conține numai sursa ideală de tensiune, se face apel la prima teoremă a lui Kirchhoff, care se scrie pentru unul dintre nodurile-extremitate al acesteia: ori pentru nodul (n_1) pentru care

$$-\underline{I}_4 - \underline{I}_5 + \underline{I}_g = 0,$$

ori pentru nodul (n_4) , pentru care

$$-\underline{I}_1 - \underline{I}_2 + \underline{I}_5 = 0.$$

Se obține, evident, aceeași valoare $\underline{I}_5 = 2$.

Pentru calculul tensiunii complexe \underline{U}_{AB} între punctele (A) și (B), se alege un contur format din laturi și/sau porțiuni de laturi, închis prin tensiunea \underline{U}_{AB} , pentru care se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff. În figura 3.1,c sunt prezentate două contururi închise $[\Gamma_1]$ și $[\Gamma_2]$, pentru care ecuațiile în complex

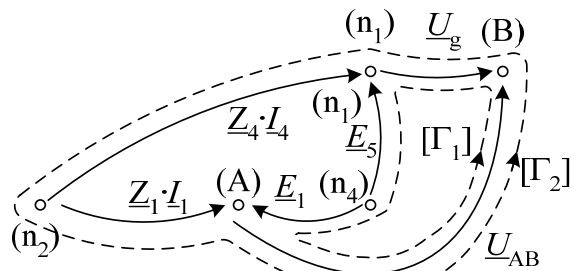


Figura 3.1,c

$$\underline{U}_{AB} - \underline{U}_g - \underline{E}_5 + \underline{E}_1 = 0$$

și, respectiv,

$$\underline{U}_{AB} - \underline{U}_g - \underline{Z}_4 \cdot \underline{I}_4 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 = 0$$

conduc la aceeași valoare $\underline{U}_{AB} = -20 + 20j$, căreia îi corespunde expresia

$$instantanee \quad u_{AB}(t) = 40 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) [\text{V}].$$

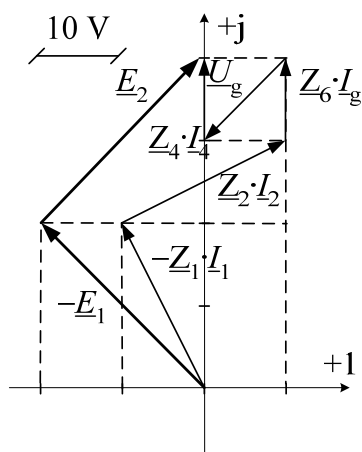


Figura 3.1,d

În figura 3.1,d este ilustrată diagrama fazorială a tensiunilor aferentă relației

$$\begin{aligned} -\underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_6 \cdot \underline{I}_g + \underline{Z}_4 \cdot \underline{I}_4 + \underline{U}_g = \\ = -\underline{E}_1 + \underline{E}_2, \end{aligned}$$

reprezentând cea de-a doua teoremă a lui Kirchhoff scrisă pentru bucla fundamentală $[b_3]$, care conține latura cu sursa ideală de curent.

Verdictul privind corectitudinea rezolvării problemei este dat de verificarea bilanțurilor puterilor activă și, respectiv, reactivă.

Puterea complexă **furnizată** de toate sursele rețelei izolate este

$$\begin{aligned}\underline{S}_{\text{gen}} &= \sum_{(k)} \mathcal{A} \underline{E}_k \cdot \underline{I}_k^* + \sum_{(k)} \mathcal{A} \underline{U}_{\text{gk}} \cdot \underline{I}_{\text{gk}}^* = \\ &= +\underline{E}_1 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{E}_2 \cdot \underline{I}_2^* - \underline{E}_5 \cdot \underline{I}_5^* - \underline{U}_{\text{g}} \cdot \underline{I}_{\text{g}}^* = 80 + 10j,\end{aligned}$$

cu puterea activă

$$P_{\text{gen}} = \Re\{\underline{S}_{\text{gen}}\} = 80 \text{ [W]}$$

și puterea reactivă

$$Q_{\text{gen}} = \Im\{\underline{S}_{\text{gen}}\} = 10 \text{ [var]}.$$

Puterea activă **disipată** în toate rezistoarele rețelei este

$$P_{\text{rez}} = \sum_{(k)} R_k \cdot I_k^2 = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 + R_4 \cdot I_4^2 = 80 \text{ [W]},$$

iar puterea reactivă $Q_{\text{bob,cond}}$ **preluată** de toate bobinele și condensatoarele rețelei este

$$\begin{aligned}Q_{\text{bob,cond}} &= Q_{\text{bob}} - |Q_{\text{cond}}| = \sum_{(k)} \omega L_k \cdot I_k^2 - \sum_{(k)} \frac{1}{\omega C_k} \cdot I_k^2 = \\ &= (\omega L_3 \cdot I_3^2 + \omega L_4 \cdot I_4^2 + \omega L_6 \cdot I_6^2) - \left(\frac{1}{\omega C_1} \cdot I_1^2 + \frac{1}{\omega C_2} \cdot I_2^2 \right) = 10 \text{ [var]}\end{aligned}$$

și reprezintă diferența dintre puterea reactivă $Q_{\text{bob}} = 30 \text{ [var]}$ **consumată** de bobine și puterea reactivă $|Q_{\text{cond}}| = 20 \text{ [var]}$ **generată** de condensatoare.

Așadar

$$P_{\text{gen}} = P_{\text{rez}} = 80 \text{ [W]}$$

și

$$Q_{\text{gen}} = Q_{\text{bob,cond}} = 10 \text{ [var]},$$

egalități care demonstrează corectitudinea rezolvării problemei.

4. Circuite trifazate

Sursele de tensiune prezentate până acum sunt dipoli activi care furnizează la bornele lor câte o tensiune sinusoidală și se mai numesc și **surse monofazate**.

În figura 4.1 este ilustrată o sursă de tensiune numită **trifazată** care este un cuadripol activ ce furnizează la bornele sale șase tensiuni grupate în două sisteme numite **sisteme trifazate de tensiuni**.

Bornele notate 1, 2 și 3 (sau R, S și T) se numesc **fazele generatorului**, iar borna 0 se numește **nulul generatorului**.

Tensiunile $u_{10}(t)$, $u_{20}(t)$ și $u_{30}(t)$ formează **sistemul trifazat al tensiunilor de fază ale generatorului**, iar tensiunile $u_{12}(t)$, $u_{23}(t)$ și $u_{31}(t)$ formează **sistemul trifazat al tensiunilor de linie ale generatorului**.

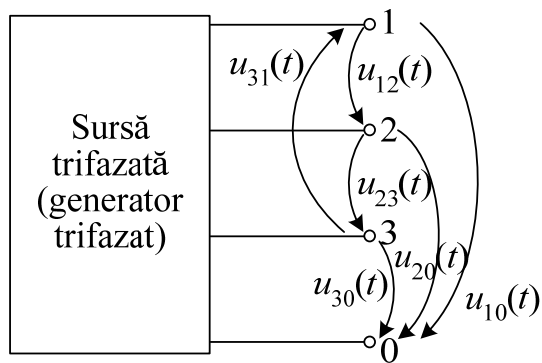


Figura 4.1

În cele ce urmează, prin **circuit trifazat** (sau **rețea trifazată**) se va înțelege un ansamblu de elemente dipolare pasive interconectate între ele într-un anumit mod, ansamblu alimentat de la un generator trifazat care va fi simbolizat doar prin bornele sale 1, 2, 3 și 0.

Fie trei mărimi variabile în timp, notate $m_1(t)$, $m_2(t)$ și $m_3(t)$ care au următoarele proprietăți:

- a) toate fac parte din aceeași specie;
- b) toate au variații sinusoidale în timp;
- c) toate au aceeași frecvență;
- d) toate au aceeași valoare efectivă;
- e) diferențele relative de fază (defazajele) între mărimi sunt egale.

Dacă mărimile $m_1(t)$, $m_2(t)$ și $m_3(t)$ satisfac simultan aceste condiții se spune că ele formează **un sistem de mărimi trifazat simetric**.

Condiția (e) este îndeplinită în una dintre următoarele trei situații:

I. Mărimile se succed în timp astfel încât **mărimea $m_2(t)$ este în urma măririi $m_1(t)$** ; iar **mărimea $m_3(t)$ este în urma măririi $m_2(t)$** (respectiv **înaintea măririi $m_1(t)$**) cu câte o treime de perioadă. În această situație,

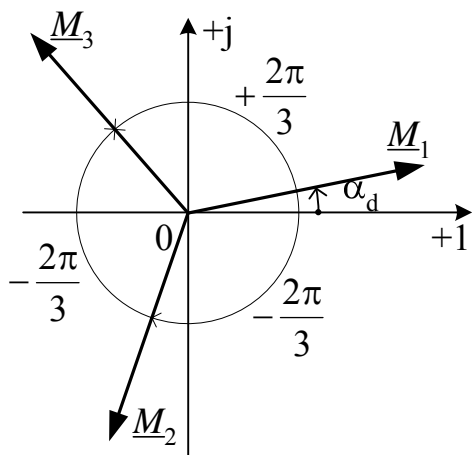


Figura 4.2

sistemul trifazat simetric (m_1 , m_2 , m_3) se numește **de succesiune directă**, variațiile în timp ale mărimilor sunt de forma:

$$\begin{cases} m_1(t) = M_d \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \alpha_d) \\ m_2(t) = M_d \sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega t + \alpha_d - \frac{2\pi}{3}\right) \\ m_3(t) = M_d \sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega t + \alpha_d + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

simbolurile complexe ale acestora sunt

$$\begin{cases} \underline{M}_1 = M_d \cdot e^{j \cdot \alpha_d} \\ \underline{M}_2 = M_d \cdot e^{j \left(\alpha_d - \frac{2\pi}{3} \right)} = \underline{M}_1 \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{3}} \\ \underline{M}_3 = M_d \cdot e^{j \left(\alpha_d + \frac{2\pi}{3} \right)} = \underline{M}_1 \cdot e^{+j \cdot \frac{2\pi}{3}} \end{cases},$$

iar fazorii asociați sunt ilustrați în figura 4.2.

Se remarcă faptul că

$$\underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{M}_3 = 0,$$

ceea ce înseamnă că, pentru orice moment de timp t , și

$$m_1(t) + m_2(t) + m_3(t) = 0.$$

II. Mărimile se succed în timp astfel încât **mărimea $m_3(t)$ este în urma măririi $m_1(t)$, iar mărimea $m_2(t)$ este în urma măririi $m_3(t)$ (respectiv înaintea măririi $m_1(t)$)** cu câte o treime de perioadă. În această situație, sistemul trifazat simetric (m_1, m_2, m_3) se numește **de succesiune inversă**, variațiile în timp ale mărimilor sunt de forma:

$$\begin{cases} m_1(t) = M_i \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \alpha_i) \\ m_2(t) = M_i \sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega t + \alpha_i + \frac{2\pi}{3}\right) \\ m_3(t) = M_i \sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega t + \alpha_i - \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases},$$

simbolurile complexe ale acestora sunt

$$\begin{cases} \underline{M}_1 = M_i \cdot e^{j \cdot \alpha_i} \\ \underline{M}_2 = M_i \cdot e^{j \left(\alpha_i + \frac{2\pi}{3} \right)} = \underline{M}_1 \cdot e^{+j \cdot \frac{2\pi}{3}} \\ \underline{M}_3 = M_i \cdot e^{j \left(\alpha_i - \frac{2\pi}{3} \right)} = \underline{M}_1 \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{3}} \end{cases},$$

iar fazorii asociați sunt ilustrați în figura 4.3.

Se remarcă faptul că

$$\underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{M}_3 = 0,$$

ceea ce înseamnă că, pentru orice moment de timp t , și

$$m_1(t) + m_2(t) + m_3(t) = 0.$$

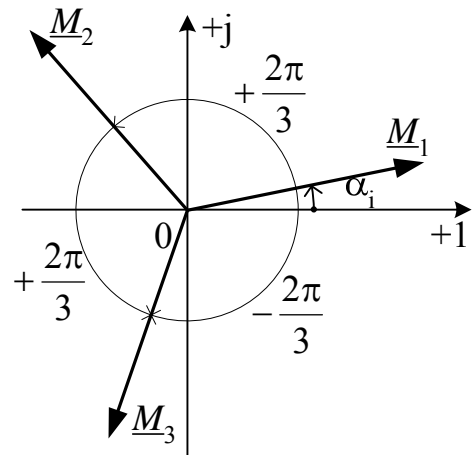


Figura 4.3

III. **Mărimile $m_1(t)$, $m_2(t)$ și $m_3(t)$ sunt în fază.** În această situație, sistemul trifazat simetric (m_1, m_2, m_3) se numește **de succesiune omopolară**, variațiile în timp ale mărimile sunt de forma:

$$m_1(t) = m_2(t) = m_3(t) = M_o \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \alpha_o),$$

simbolurile complexe ale acestora sunt

$$\underline{M}_1 = \underline{M}_2 = \underline{M}_3 = M_o \cdot e^{j \cdot \alpha_o},$$

iar fazorii asociați, de același modul și de aceeași orientare, sunt ilustrați în figura 4.4.

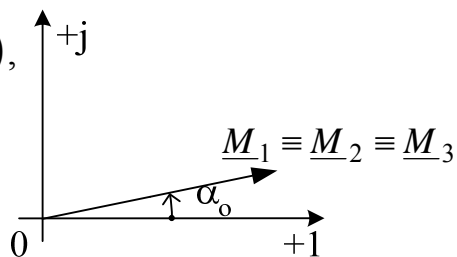


Figura 4.4

Elementele dipolare pasive, alcătuind diverse configurații, alimentate de la un generator trifazat formează **receptoare trifazate** ale căror principale conexiuni sunt cele **în stea** și **în triunghi**, motiv pentru care acestea vor fi prezentate în cele ce urmează.

4.1. Receptorul trifazat cu conexiune în stea

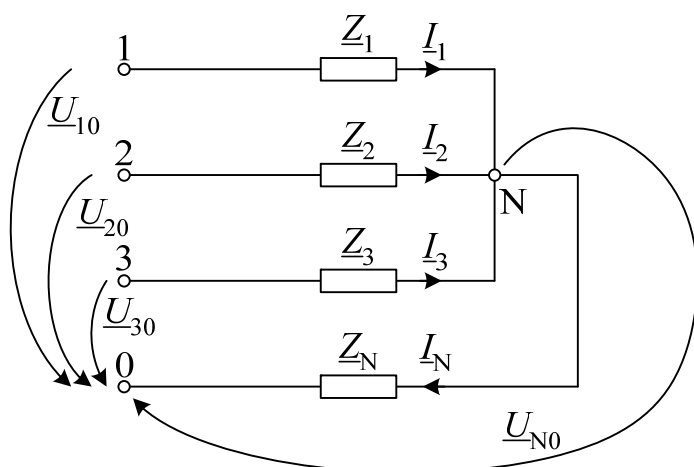


Figura 4.5

Cele trei receptoare monofazate (montate ca în figura 4.5) au o bornă comună (notată N) care poartă numele de **nulul receptorului** și sunt caracterizate prin impedanțele lor complexe \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 și \underline{Z}_3 (respectiv prin admitanțele lor complexe \underline{Y}_1 , \underline{Y}_2 și \underline{Y}_3).

Conductorul care leagă nulul 0 al generatorului de nulul N al receptorului se numește **conductor neutru** (sau **fir neutru**) și este caracterizat prin impedanța sa complexă \underline{Z}_N (respectiv admitanța sa complexă \underline{Y}_N).

Prin definiție, dacă

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}_{st} = Z_{st} \cdot e^{j \cdot \varphi}$$

atunci receptorul trifazat se numește **echilibrat**, iar $\cos \varphi$ este **factorul de putere** sub care lucrează receptorul trifazat cu conexiune în stea. Dacă cel puțin una dintre egalitățile

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$$

nu este satisfăcută, atunci receptorul trifazat se numește **dezechilibrat**.

Dacă sunt cunoscute impedanțele complexe \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 , \underline{Z}_3 și \underline{Z}_N , precum și sistemul trifazat al tensiunilor de fază ale generatorului (prin imaginile lor complexe \underline{U}_{10} , \underline{U}_{20} și \underline{U}_{30}), atunci algoritmul de determinare a curenților \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 (numiți **curenți de linie**) și \underline{I}_N (numit **curent al firului neutru**) comportă parcurgerea următoarelor etape.

1. Calculul admitanțelor complexe \underline{Y}_1 , \underline{Y}_2 , \underline{Y}_3 și \underline{Y}_N și apoi al tensiunii \underline{U}_{N0} (numită **tensiune de deplasare a neutrului receptorului în raport cu nulul generatorului**, pe scurt **deplasarea neutrului**) cu ajutorul relației

$$\underline{U}_{N0} = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{U}_{10} + \underline{Y}_2 \cdot \underline{U}_{20} + \underline{Y}_3 \cdot \underline{U}_{30}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_N}. \quad (4.1)$$

Această relație poartă numele de relația lui Millman și rezultă din prima teoremă a lui Kirchhoff scrisă pentru nodul N al receptorului

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3,$$

în care

$$\begin{cases} \underline{I}_N = \underline{Y}_N \cdot \underline{U}_{N0} \\ \underline{I}_k = \underline{Y}_k \cdot \underline{U}_{kN} = \underline{Y}_k \cdot (\underline{U}_{k0} - \underline{U}_{N0}); k = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (4.2)$$

2. Calculul curenților de linie și al curentului firului neutru cu ajutorul relațiilor (4.2).

Dacă $\underline{Z}_N = 0$, atunci avem de-a face cu un receptor trifazat cu conexiune în stea cu fir neutru de impedanță nulă, iar dacă $\underline{Y}_N = 0$ avem de-a face cu un receptor trifazat cu conexiune în stea fără fir neutru, caz în care generatorul trifazat trebuie privit ca un tripol activ.

4.2. Receptorul trifazat cu conexiune în triunghi

Cele trei receptoare monofazate (montate ca în figura 4.6) sunt caracterizate prin impedanțele lor complexe \underline{Z}_{12} , \underline{Z}_{23} și \underline{Z}_{31} .

Prin definiție, dacă

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_{tr} = Z_{tr} \cdot e^{j\varphi},$$

atunci receptorul trifazat se numește **echilibrat**, iar $\cos \varphi$ este **factorul de putere** sub care lucrează receptorul trifazat cu conexiune în triunghi. Dacă cel puțin una dintre egalitățile

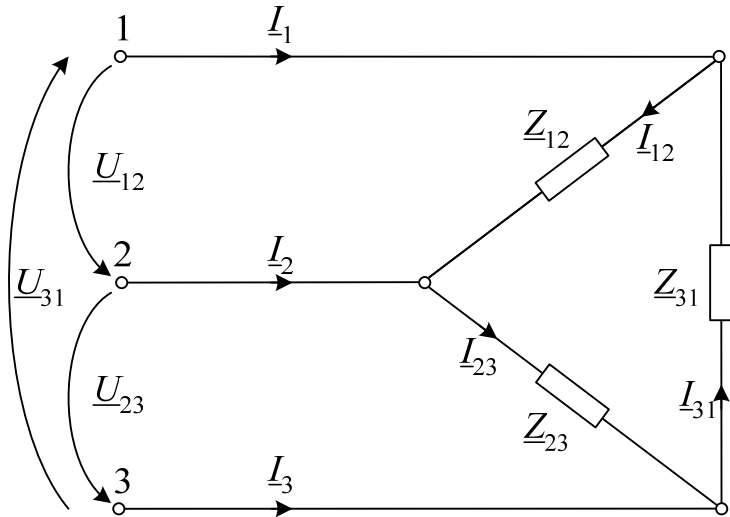


Figura 4.6

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31}$$

nu este satisfăcută, atunci receptorul trifazat se numește **dezechilibrat**.

Dacă sunt cunoscute impedanțele complexe \underline{Z}_{12} , \underline{Z}_{23} și \underline{Z}_{31} , precum și sistemul trifazat al tensiunilor de linie ale generatorului (prin imaginile lor complexe \underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} și \underline{U}_{31}), atunci determinarea curenților \underline{I}_{12} , \underline{I}_{23} , \underline{I}_{31} , respectiv \underline{I}_1 , \underline{I}_2 și \underline{I}_3 , se face cu ajutorul relațiilor

$$\begin{cases} \underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} \\ \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} \\ \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} \end{cases} \quad \text{și, respectiv,} \quad \begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} \\ \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} \end{cases},$$

care reprezintă ecuațiile de funcționare ale impedanțelor complexe \underline{Z}_{12} , \underline{Z}_{23} și \underline{Z}_{31} , respectiv relațiile corespunzătoare primei teoreme a lui Kirchhoff.

4.3. Verificarea bilanțurilor puterilor activă și reactivă în circuite trifazate

Dacă receptorul trifazat este cu **conexiune în stea** (cu sau fără fir neutru), atunci generatorul trifazat furnizează receptorului trifazat puterea complexă

$$\underline{S}_{\text{gen}} = \underline{U}_{10} \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_{20} \cdot \underline{I}_2^* + \underline{U}_{30} \cdot \underline{I}_3^* = P_{\text{gen}} + jQ_{\text{gen}}.$$

Dacă receptorul trifazat este cu **conexiune în triunghi**, atunci generatorul trifazat furnizează receptorului trifazat puterea complexă

$$\begin{aligned} \underline{S}_{\text{gen}} &= \underline{U}_{12} \cdot \underline{I}_1^* - \underline{U}_{23} \cdot \underline{I}_3^* = \underline{U}_{23} \cdot \underline{I}_2^* - \underline{U}_{31} \cdot \underline{I}_1^* = \\ &= \underline{U}_{31} \cdot \underline{I}_3^* - \underline{U}_{12} \cdot \underline{I}_2^* = P_{\text{gen}} + jQ_{\text{gen}}. \end{aligned}$$

În cazul general, în care un generator trifazat alimentează un ansamblu de receptoare trifazate (oricare și oricâte ar fi acestea), verificarea bilanțurilor puterilor activă și reactivă este o reflectare a teoremei de conservare a acestor puteri:

$$P_{\text{gen}} = P_{\text{rez}} = \sum_{k=1}^L R_k \cdot I_k^2 > 0$$

și, respectiv,

$$Q_{\text{gen}} = Q_{\text{bob, cond}} = \sum_{k=1}^L \left(\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k} \right) \cdot I_k^2 + \sum_{\substack{k,h=1 \\ h < k}}^L 2\omega L_{kh} \cdot \text{Re} \{ \underline{I}_k \cdot \underline{I}_h^* \} \geq 0.$$

Extensia acestor sume de la 1 la L implică luarea în considerație a tuturor elementelor pasive care intră în componența receptoarelor trifazate privite ca un unic receptor monofazat cu L laturi.

Aplicația 4.1.

Circuitele ilustrate în figurile A.4.1,a ÷ A.4.1,d, cu receptoarele cu conexiune în stea cu fir neutru de impedanță nulă, sunt alimentate cu sisteme trifazate de tensiuni simetrice. Pentru fiecare dintre acestea se cere:

1. Să se determine simbolurile complexe și expresiile instantanee ale tuturor curenților.
2. Să se realizeze diagramele fazoriale ale curenților și tensiunilor.
3. Să se verifice bilanțurile puterilor activă și, respectiv, reactivă.

Se știe că:

• receptorul din figura A.4.1,a, pentru care se cunosc valorile numerice $R_1 = 20\sqrt{3} [\Omega]$, $R_2 = \frac{40}{\sqrt{3}} [\Omega]$, $R_3 = \frac{10}{\sqrt{3}} [\Omega]$, $\omega L_1 = 20[\Omega]$, $\frac{1}{\omega C_3} = 10 [\Omega]$, este alimentat cu un sistem de tensiuni trifazat simetric de succesiune directă, cu $u_{10}(t) = 120\sqrt{2} \cdot \sin \omega t [\text{V}]$;

• receptorul din figura A.4.1,b, pentru care se cunosc valorile numerice

$R_1 = 30 [\Omega]$, $R_2 = 60 [\Omega]$, $R_3 = 15 [\Omega]$, $\frac{1}{\omega C_1} = 10\sqrt{3} [\Omega]$, $\omega L_3 = 15\sqrt{3} [\Omega]$, este

alimentat cu un sistem de tensiuni trifazat simetric de succesiune inversă, cu $u_{20}(t) = 120\sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) [\text{V}]$;

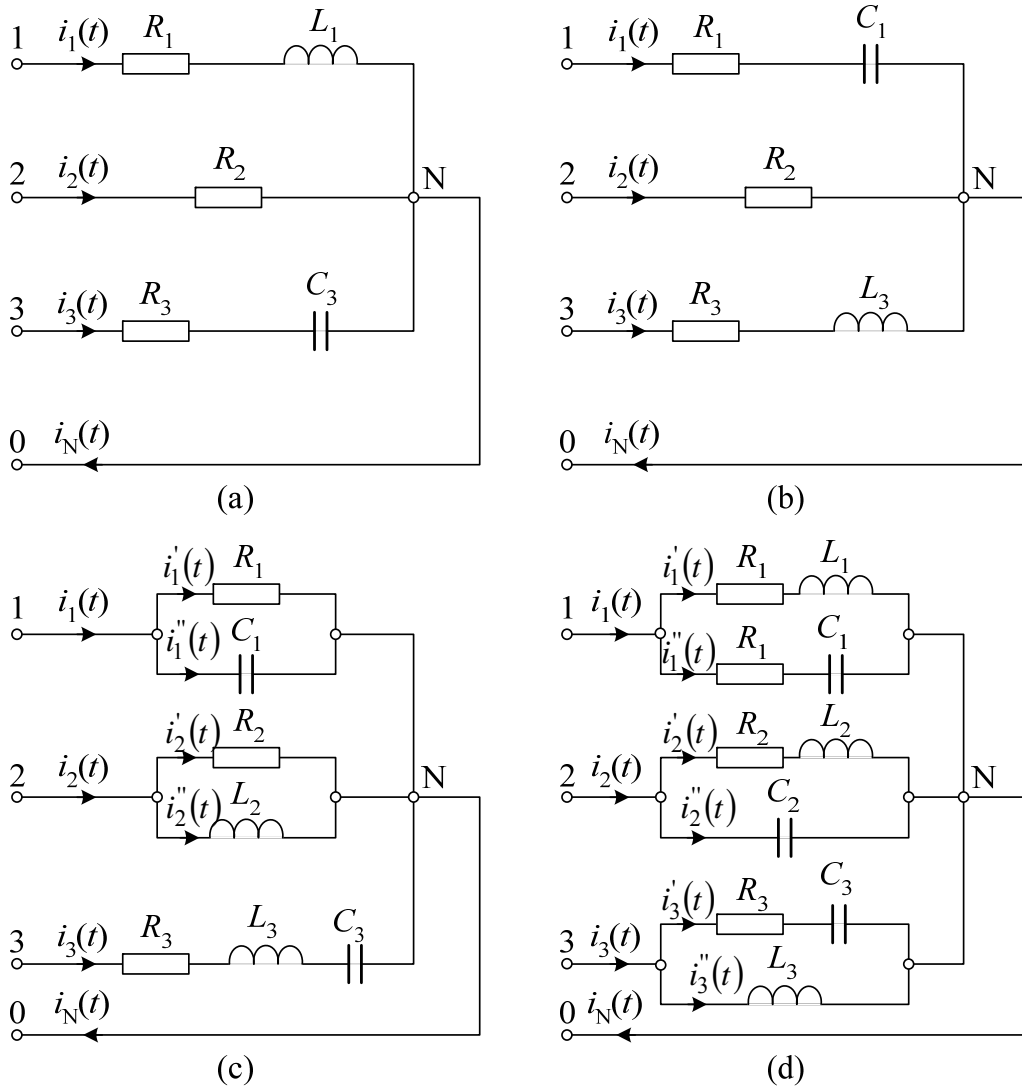


Figura A.4.1

• receptorul din figura A.4.1,c, pentru care se cunosc valorile numerice

$$R_1 = 40 [\Omega], R_2 = R_3 = 60 [\Omega], \frac{1}{\omega C_1} = 40\sqrt{3} [\Omega], \omega L_2 = 20\sqrt{3} [\Omega], \omega L_3 = 5 [\Omega],$$

$\frac{1}{\omega C_3} = 5 [\Omega]$, este alimentat cu un sistem de tensiuni trifazat simetric de

$$\text{succesiune directă, cu } u_{30}(t) = 240\sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right) [\text{V}];$$

• receptorul din figura A.4.1,d, pentru care se cunosc valorile numerice

$$R_1 = \omega L_1 = \frac{1}{\omega C_1} = 20 [\Omega], R_2 = R_3 = 10 [\Omega], \omega L_2 = 10\sqrt{3} [\Omega], \omega L_3 = 10\sqrt{3} [\Omega],$$

$\frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{\omega C_3} = 10\sqrt{3} [\Omega]$, este alimentat cu un sistem de tensiuni trifazat simetric

$$\text{de succesiune directă, cu } u_{10}(t) = 120\sqrt{2} \cdot \sin \omega t [\text{V}].$$

Soluție. Curenții complecși $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3, \underline{I}_N$ se determină urmând algoritmul prezentat în paragraful 4.1 al lucrării. Pentru problemele A.4.1,c și A.4.1,d pentru calculul celorlalți curenți se utilizează formulele în complex ale divizorului pasiv de curent (similare expresiilor (2.17) din curent continuu, prezentate în capitolul al 2-lea).

Rezultatele corespunzătoare valorilor numerice propuse în cele patru probleme sunt sistematizate în tabelul A.4.1 în care sunt date și valorile puterilor activă P și reactivă Q pentru care se verifică bilanțurile acestor puteri.

Tabelul A.4.1

	Fig. A.4.1,a	Fig. A.4.1,b	Fig. A.4.1,c	A.4.1,d
\underline{I}_1	$3 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{6}}$	$2\sqrt{3} \cdot e^{j \cdot 0}$	$4\sqrt{3} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{3}}$	$6 \cdot e^{j \cdot 0}$
\underline{I}'_1	—	—	$6 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{6}}$	$3\sqrt{2} \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{4}}$
\underline{I}''_1	—	—	$2\sqrt{3} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{3}}$	$3\sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{4}}$
\underline{I}_2	$3\sqrt{3} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{3}}$	$2 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}$	$8 \cdot e^{-j \cdot \frac{5\pi}{6}}$	$2\sqrt{3} \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}}$
\underline{I}'_2	—	—	$4 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}}$	$6 \cdot e^{j \cdot \pi}$

\underline{I}_2''	-	-	$4\sqrt{3} \cdot e^{j\pi}$	$4\sqrt{3} \cdot e^{-j\frac{\pi}{6}}$
\underline{I}_3	$6\sqrt{3} \cdot e^{j\pi}$	$4 \cdot e^{j\frac{5\pi}{6}}$	$4 \cdot e^{j\frac{5\pi}{6}}$	$2\sqrt{3} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$
\underline{I}_3'	-	-	-	$6 \cdot e^{j\pi}$
\underline{I}_3''	-	-	-	$4\sqrt{3} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}}$
\underline{I}_N	$12 \cdot e^{-j\frac{5\pi}{6}}$	$4 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$	$8 \cdot e^{j\frac{5\pi}{6}}$	$6 \cdot e^{j0}$
P [W]	$900\sqrt{3}$	840	3360	1440
Q [var]	-900	$120\sqrt{3}$	$480\sqrt{3}$	0

În figurile A.4.1,e, A.4.1,f, A.4.1,g și A.4.1,h sunt prezentate diagramele fazoriale de curenți și de tensiuni corespunzătoare circuitelor ilustrate în figurile A.4.1,a, A.4.1,b, A.4.1,c și, respectiv, A.4.1,d.

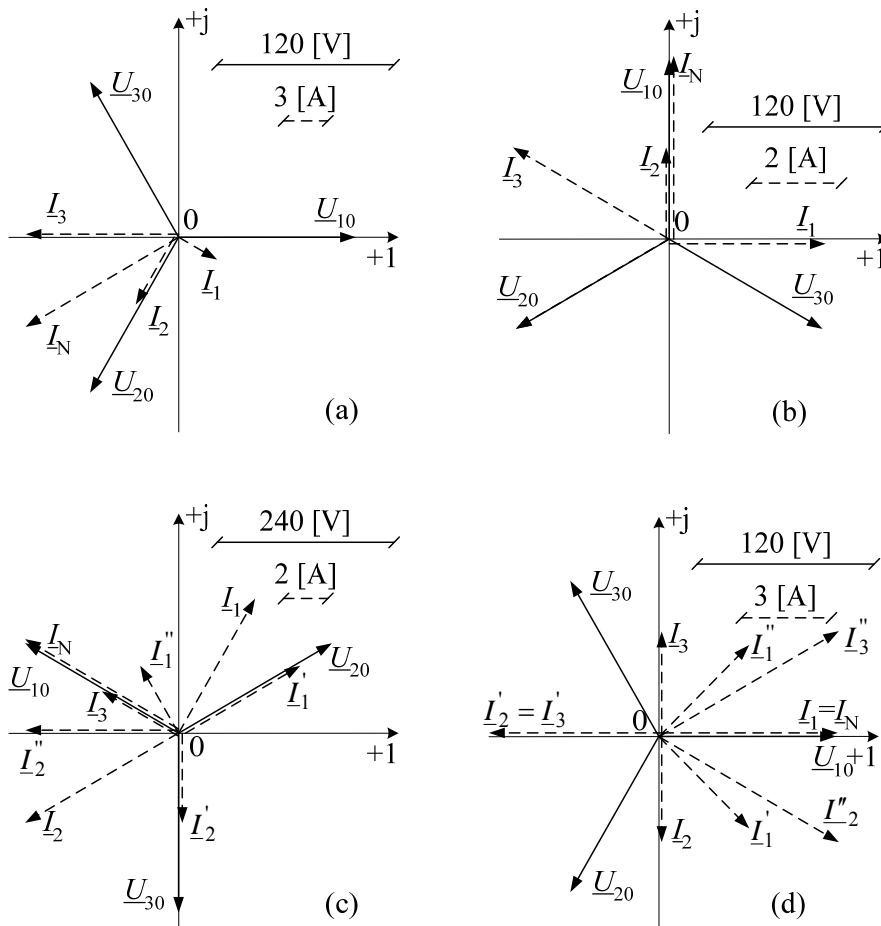


Figura A.4.1