

# 1. Elemente introductive de topologia circuitelor electrice

## 1.1. Definiții

Se numește **element multipolar de circuit** (sau **multipol**) de ordinul  $m$  un domeniu spațial a cărui conexiune cu exteriorul se realizează prin intermediul a  $m$  borne de acces. Elementul multipolar în care  $m = 2$  se numește **dipol**, elementul multipolar în care  $m = 3$  se numește **tripol**, iar elementul multipolar în care  $m = 4$  se numește **cuadripol**.

Prin **circuit electric** (sau **rețea electrică**) se înțelege un ansamblu de elemente multipolare de circuit, interconectate prin intermediul bornelor lor de acces, într-un anumit mod, în vederea realizării unui anumit scop. O rețea care nu posedă conexiuni cu exteriorul se numește **izolată**.

Se numește **nod** o bornă comună a cel puțin trei elemente multipolare de circuit. Se numește **latură** o cale conductoare între două noduri, care conținând elemente dipolare de circuit. Se numește **bucă** o mulțime de laturi împreună cu nodurile aferente lor în care **mulțimea laturilor alcătuiește un contur închis** și în care fiecare latură și fiecare nod sunt conținute o singură dată în conturul respectiv.

Pentru o rețea izolată cu  $L$  laturi și  $N$  noduri, o mulțime de noduri în număr de  $N_f = N - 1$  formează **sistemul de noduri fundamentale (independente)**, iar o mulțime de bucle în număr de  $B_f = L - N + 1$  care acoperă toate laturile rețelei formează **sistemul de bucle fundamentale (independente)** ale acesteia. Remarcăm că pentru o rețea dată **alegerea nodurilor independente și a buclelor independente este opțională**, fapt care va fi utilizat în rezolvarea problemelor.

Se numește **graf neorientat** (pe scurt **graf**) al unui circuit o reprezentare grafică  $\mathcal{G}$  a acestuia, în care nodurile sunt simbolizate prin puncte, iar laturile sunt simbolizate prin arce de curbă (făcându-se abstracție de elementele de circuit de pe laturi).

Un graf  $\mathcal{S}$  se numește **subgraf** al grafului  $\mathcal{G}$  dacă mulțimea laturilor și a nodurilor grafului  $\mathcal{S}$  este inclusă în mulțimea laturilor și nodurilor grafului  $\mathcal{G}$ .

Pentru o rețea izolată cu  $L$  laturi și  $N$  noduri, de graf  $\mathcal{G}$ , un subgraf  $\mathcal{A}$  al grafului  $\mathcal{G}$  care conține  $R = N - 1$  laturi împreună cu nodurile aferente acestora, cele  $N - 1$  laturi **neformând un contur închis**, poartă numele de **arbore**.

Cele  $R$  laturi ale arborelui se numesc **ramuri**.

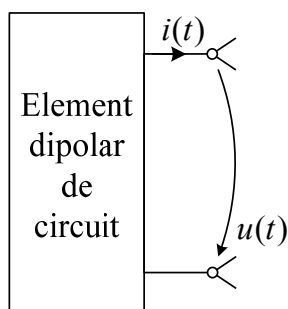
Subgraful  $\mathcal{C}$  al grafului  $\mathcal{G}$  care conține mulțimea laturilor, numite **corzi**, care nu intră în componența arborelui, se numește **coarbore**.

**Graful orientat al curenților** se obține din graful neorientat al circuitului pe care se orientează laturile conform unor sensuri de referință (alese arbitrar) pentru curenții ce străbat laturile.

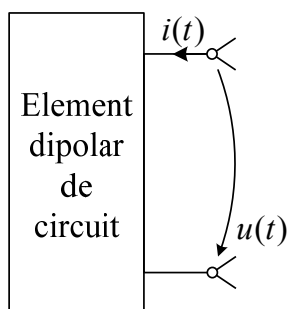
**Graful orientat al tensiunilor** se obține din graful neorientat al circuitului pe care se orientează laturile conform unor sensuri de referință (alese arbitrar) pentru tensiunile la bornele laturilor. Pe acest graf pot fi evidențiate și tensiunile la bornele diverselor elemente de circuit, precum și tensiunile între **oricare** două puncte ale rețelei.

## 1.2. Elemente dipolare de circuit

Elementele dipolare de circuit se caracterizează prin mărimile la borne (în general variabile în timp) **tensiune electrică**  $u(t)$  și **intensitate a curențului electric** – pe scurt



(a)



(b)

Figura 1.2.1

**curent electric**  $i(t)$ , mărimi care pot fi asociate ca sensuri de referință în numai două moduri, și anume cele ilustrate în figura 1.2.1. Se spune că asocierea se face după **convenția (regula) de la generatoare** (vezi figura 1.2.1,a) și, respectiv, după **convenția (regula) de la receptoare** (vezi figura 1.2.1,b).

**Relațiile de calcul ale puterii electromagnetice  $p(t)$  primite pe la bornele sale de un element dipolar de circuit sunt:**

– în cazul adoptării convenției de la generatoare

$$p(t) = -u(t) \cdot i(t); \quad (1.1)$$

– în cazul adoptării convenției de la receptoare

$$p(t) = +u(t) \cdot i(t). \quad (1.2)$$

**Semnul mărimii  $p(t)$** , semn obținut după efectuarea calculelor oricare ar fi convenția utilizată, **evidențiază sensul real al transferului de putere**: la momentul de timp  $t$  dipolul primește putere electromagnetică pe la borne dacă  $p(t) > 0$  și, respectiv, cedează putere electromagnetică pe la borne dacă  $p(t) < 0$ .

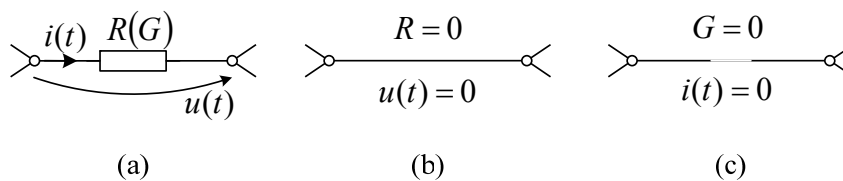
Se numește **ecuație de funcționare** a unui element dipolar de circuit relația matematică ce dă dependența între mărimile  $u(t)$  și  $i(t)$ , cu precizarea **obligatorie** a convenției de asociere a sensurilor lor de referință.

Printr-un **element ideal de circuit** se înțelege un element în care se reține un singur proces energetic (cel considerat a fi esențial).

**Rezistorul ideal liniar**, cu simbolul ilustrat în figura 1.2.2,a, este caracterizat prin mărimea pozitivă și constantă  $R$  numită **rezistența rezistorului** și are ecuația de funcționare

$$u(t) = R \cdot i(t), \quad (1.3)$$

asocierea sensurilor de referință pentru mărimile la borne  $u(t)$  și  $i(t)$  corespunzând convenției de la receptoare.



**Figura 1.2.2**

Prin definiție **conductanța  $G$  a rezistorului** este

$$G = R^{-1} \quad (1.4)$$

astfel încât ecuația de funcționare (1.3) poate fi scrisă și sub forma

$$i(t) = G \cdot u(t). \quad (1.5)$$

În orice moment de timp  $t$  puterea electromagnetică  $p(t)$  primită pe la borne de rezistor este **pozitivă**:

$$p(t) = +u(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) = G \cdot u^2(t) \geq 0, \quad (1.6)$$

deci este efectiv primită de rezistor pe la bornele sale și **corespunde efectului electrocaloric de transformare ireversibilă a energiei electromagnetice în energie calorică**. Rezistorul este un **element pasiv disipativ**.

Rezistorul care are rezistența nulă se numește **scurtcircuit** (sau **conductor perfect**), are simbolul prezentat în figura 1.2.2,b și ecuația sa de funcționare este

$$u(t) = 0. \quad (1.7)$$

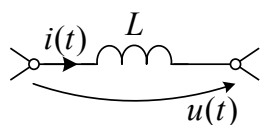
Valoarea și sensul curentului care străbate scurtcircuitul (purtând numele de **curent de scurtcircuit**) sunt univoc determinate de configurația rețelei în care acesta este plasat.

Rezistorul care are conductanța nulă se numește **gol** (sau **întrerupere**), are simbolul prezentat în figura 1.2.2,c și ecuația sa de funcționare este

$$i(t) = 0. \quad (1.8)$$

Valoarea și sensul tensiunii la bornele golului (purtând numele de **tensiune de mers în gol**) sunt univoc determinate de configurația rețelei în care acesta este plasat.

**Bobina ideală liniară**, cu simbolul ilustrat în figura 1.2.3, este caracterizată prin mărimea pozitivă și constantă  $L$  numită **inductivitatea bobinei** și are ecuația de funcționare



$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}, \quad (1.9)$$

asocierea sensurilor de referință pentru mărimile la borne  $u(t)$  și  $i(t)$  corespunzând convenției de la receptoare.

**Figura 1.2.3**

Integrând relația (1.9) între momentele de timp 0 și  $t$  se obține

$$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u(t) \cdot dt + i(0), \quad (1.10)$$

ceea ce arată că pentru orice moment de timp  $t$  ulterior momentului inițial curentul  $i(t)$  prin bobină depinde și de curentul  $i(0)$  existent la momentul  $t = 0$ .

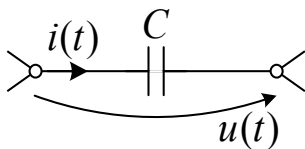
În orice moment de timp  $t$ , puterea electromagnetică  $p(t)$  primită pe la borne de o bobină este

$$p(t) = +u(t) \cdot i(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{L \cdot i^2(t)}{2} \right] \geq 0, \quad (1.11)$$

relația (1.11) punând în evidență expresia **energiei magnetice înmagazinate în bobină** la momentul de timp  $t$ :

$$W_m(t) = \frac{L \cdot i^2(t)}{2}. \quad (1.12)$$

**Condensatorul ideal liniar**, cu simbolul ilustrat în figura 1.2.4, este caracterizat prin mărimea pozitivă și constantă  $C$  numită **capacitatea condensatorului** și are ecuația de funcționare



$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}, \quad (1.13)$$

**Figura 1.2.4**

asocierea sensurilor de referință pentru mărimile la borne  $u(t)$  și  $i(t)$  corespunzând convenției de la receptoare.

Integrând relația (1.13) între momentele de timp 0 și  $t$  se obține

$$u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) \cdot dt + u(0), \quad (1.14)$$

ceea ce arată că pentru orice moment de timp  $t$  ulterior momentului inițial tensiunea  $u(t)$  la bornele condensatorului depinde și de tensiunea  $u(0)$  existentă la momentul  $t = 0$ .

În orice moment de timp  $t$  puterea electromagnetică  $p(t)$  primită pe la borne de un condensator este

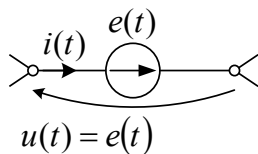
$$p(t) = +u(t) \cdot i(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{C \cdot u^2(t)}{2} \right] \geq 0 \quad (1.15)$$

relația (1.15) punând în evidență expresia **energiei electrice înmagazinate în condensator** la momentul de timp  $t$  :

$$W_e(t) = \frac{C \cdot u^2(t)}{2}. \quad (1.16)$$

Bobina și condensatorul sunt **elemente pasive acumulative de energie**.

**Sursa ideală de tensiune**, cu simbolul ilustrat în figura 1.2.5, este caracterizată prin mărimea  $e(t)$  numită **tensiune electromotoare** și are ecuația de funcționare



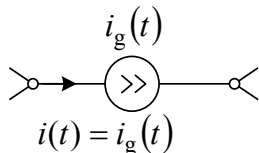
$$u(t) = e(t). \quad (1.17)$$

**Figura 1.2.5**

Sursa ideală de tensiune asigură la bornele sale o tensiune  $u(t) = e(t)$  cu sensul din figură, oricare ar fi valoarea și sensul curentului  $i(t)$  care o străbate.

În funcție de sensul curentului  $i(t)$  și de semnele valorilor instantanee ale mărimilor  $u(t) = e(t)$  și  $i(t)$ , pot exista momente de timp pentru care puterea electromagnetică  $p(t)$  dată de relațiile de calcul (1.1) și (1.2) este pozitivă sau negativă, deci **sursa ideală de tensiune poate funcționa atât în regim de generator, cât și în regim de receptor de putere**.

**Sursa ideală de curent**, cu simbolul ilustrat în figura 1.2.6, este caracterizată prin mărimea  $i_s(t)$  numită **curent electromotor** și are ecuația de funcționare



$$i(t) = i_s(t). \quad (1.18)$$

**Figura 1.2.6**

Sursa ideală de curent asigură prin latura de circuit în care este plasată un curent  $i(t) = i_s(t)$  cu sensul din figură, oricare ar fi valoarea și sensul tensiunii  $u_s(t)$  la bornele sale.

În funcție de sensul tensiunii  $u_s(t)$  și de semnele valorilor instantanee ale mărimilor  $i(t) = i_s(t)$  și  $u_s(t)$ , pot exista momente de timp pentru care puterea electromagnetică  $p(t)$  dată de relațiile de calcul (1.1) și (1.2) este pozitivă sau negativă, deci și **sursa ideală de curent poate funcționa atât în regim de generator, cât și în regim de receptor de putere**.

Menționăm că unii autori preferă pentru curentul electromotor notația  $i_g(t)$

în loc de  $i_s(t)$  (respectiv,  $u_g(t)$  în loc de  $u_s(t)$  pentru tensiunea la bornele sale), motiv pentru care în continuare se vor folosi ambele notații.

Schema echivalentă a unei **surse reale de tensiune (SRT)** este o schemă echivalentă **serie** care conține o sursă ideală de tensiune (de tensiune electromotoare  $e(t)$ ) și un rezistor ideal (de rezistență  $R_i'$  numită **rezistență internă**).

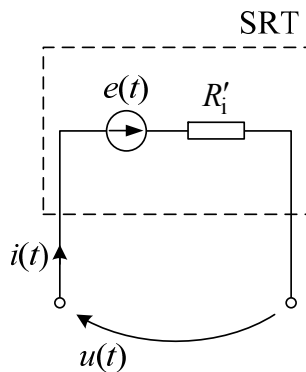


Figura 1.2.7

Dacă mărimile la borne tensiune  $u(t)$  și curent  $i(t)$  sunt asociate ca sensuri de referință după **convenția de la generatoare** (vezi figura 1.2.7), atunci ecuația de funcționare a sursei este

$$u(t) = e(t) - R_i' \cdot i(t). \quad (1.19)$$

Schema echivalentă a unei **surse reale de curent (SRC)** este o schemă echivalentă **paralel** care conține o sursă ideală de curent (de curent electromotor  $i_s(t)$ ) și un rezistor ideal (de rezistență  $R_i''$  numită **rezistență internă**).

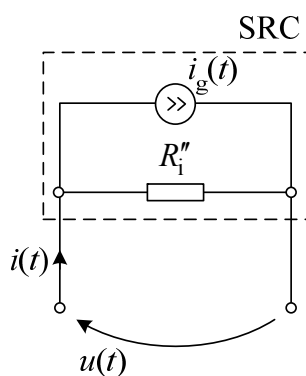


Figura 1.2.8

Dacă mărimile la borne tensiune  $u(t)$  și curent  $i(t)$  sunt asociate ca sensuri de referință după **convenția de la generatoare** (vezi figura 1.2.8), atunci ecuația de funcționare a sursei este

$$i(t) = i_s(t) - \frac{u(t)}{R_i''}. \quad (1.20)$$

**Sursele de tensiune și de curent sunt elemente active.**

### 1.3. Teoremele lui Kirchhoff

#### Prima teoremă a lui Kirchhoff

„Pentru orice nod (n) al unei rețele electrice suma algebrică a curenților  $i_k(t)$  ai laturilor care concură în acel nod este nulă:

$$\sum_{k \in (n)} \mathcal{A} i_k(t) = 0.” \quad (1.21)$$

Caracterul algebric al sumei este impus de **atribuirea semnului plus pentru curenții care ies din nodul (n) și, respectiv, semnul minus pentru curenții care intră în acel nod.**

#### A doua teoremă a lui Kirchhoff

„Oricare ar fi un contur închis  $[\gamma]$ , suma algebrică a tensiunilor  $u_k(t)$  de-a lungul aceluși contur este nulă:

$$\sum_{k \in [\gamma]} \mathcal{A} u_k(t) = 0.” \quad (1.22)$$

Caracterul algebric al sumei este impus de necesitatea parcurgerii conturului într-un anumit sens (arbitrar) și **atribuirea semnului plus pentru tensiunile al căror sens coincide cu sensul de parcurgere și, respectiv, semnul minus pentru tensiunile al căror sens este opus sensului de parcurgere.**

Cum o buclă este un contur închis, se poate formula cea de-a doua teoremă a lui Kirchhoff pentru acest caz: „Suma algebrică a tensiunilor  $u_{k,\text{lat}}(t)$  la bornele tuturor laturilor care alcătuiesc o buclă  $[b]$ , oricare, a unei rețele este nulă:

$$\sum_{k \in [b]} \mathcal{A} u_{k,\text{lat}}(t) = 0.” \quad (1.22)$$

**Observație:** În relațiile de mai sus (ca și în cele care vor urma) sumele algebrice sunt marcate cu ajutorul simbolului  $\mathcal{A}$  plasat în vecinătatea semnului de sumă.



## 2. Circuite în regim staționar (de curent continuu)

Circuitele de curent continuu sunt acele circuite în care sursele de tensiune și de curent furnizează la bornele lor mărimi invariabile în timp. În aceste condiții, după stingerea regimurilor tranzitorii toate mărimile de circuit (curenți, tensiuni, potențiale) sunt de asemenea invariabile în timp. Aceste mărimi vor fi notate cu majuscule.

### 2.1. Comportarea în curent continuu a elementelor dipolare ideale de circuit

**Rezistorul ideal liniar** are ecuația de funcționare

$$U = R \cdot I \quad (2.1)$$

sau

$$I = G \cdot U \quad (2.2)$$

mărimile la borne  $U$  și  $I$  fiind asociate conform convenției de la receptoare (vezi figura 2.1.1).

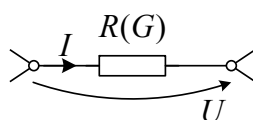


Figura 2.1.1

În orice moment de timp rezistorul primește pe la bornele sale puterea electromagnetică

$$P = R \cdot I^2 = G \cdot U^2 \geq 0. \quad (2.3)$$

**Bobina ideală liniară** are ecuația de funcționare

$$U = 0, \quad (2.4)$$

care rezultă din particularizarea în regim invariabil în timp a ecuației (1.9).

**În regim permanent de curent continuu bobina ideală se comportă ca un scurtcircuit** (vezi figura 2.1.2) acumulator de energie magnetică constantă în timp



$$W_m = \frac{L \cdot I^2}{2}, \quad (2.5)$$

**Figura 2.1.2**

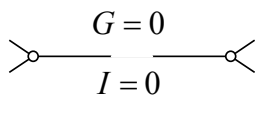
$I$  fiind valoarea curentului care străbate bobina într-o configurație de rețea dată.

**Condensatorul ideal liniar** are ecuația de funcționare

$$I = 0, \quad (2.6)$$

care rezultă din particularizarea în regim invariabil în timp a ecuației (1.13).

**În regim permanent de curent continuu bobina ideală se comportă ca un gol** (vezi figura 2.1.3) acumulator de energie electrică constantă în timp



$$W_e = \frac{C \cdot U^2}{2}, \quad (2.7)$$

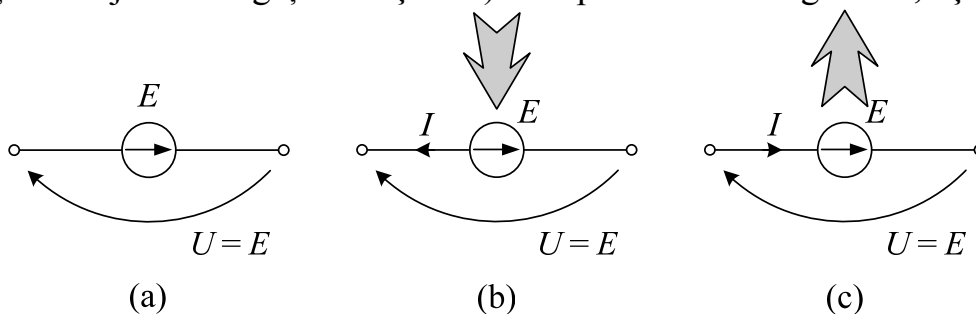
**Figura 2.1.3**

$U$  fiind valoarea tensiunii care se stabilește la bornele condensatorului într-o configurație de rețea dată.

**Sursa ideală de tensiune** (vezi figura 2.1.4,a) are ecuația de funcționare

$$U = E \quad (2.8)$$

oricare ar fi valoarea și sensul curentului  $I$  care o străbate. Cele două situații posibile pentru **sensul real al curentului care străbate sursa** (și, corespunzător, pentru **sensul real al puterii transferate pe la borne**, sens evidențiat cu ajutorul săgeților hașurate) sunt prezentate în fig. 2.1.4,b și 2.1.4,c.



**Figura 2.1.4**

Sursa ideală de curent (vezi figura 2.1.5,a) are ecuația de funcționare

$$I = I_g \quad (2.9)$$

oricare ar fi valoarea și sensul tensiunii  $U_g$  la bornele sale. Cele două situații posibile pentru **sensul real al tensiunii la bornele sursei** (și, corespunzător, pentru **sensul real al puterii transferate pe la borne**, sens evidențiat și de această dată cu ajutorul săgeților hașurate) sunt prezentate în figurile 2.1.5,b și 2.1.5,c.

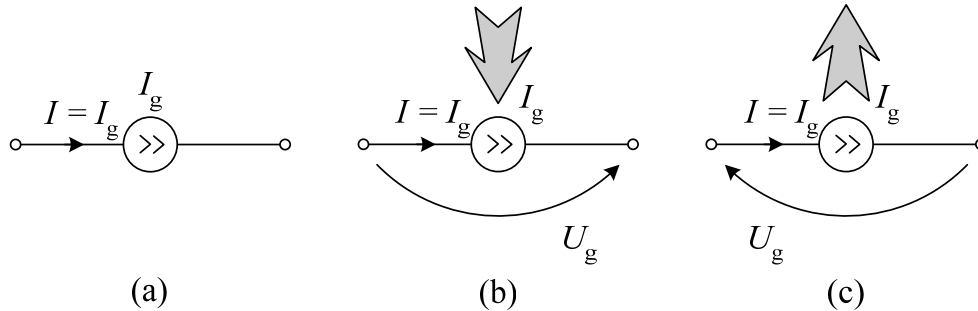


Figura 2.1.5

## 2.2. Teoreme utilizate în studiul circuitelor de curent continuu

**Prima teoremă a lui Kirchhoff:** „Pentru orice nod (n) al unei rețele electrice suma algebrică a curenților  $I_k$  ai laturilor care concură în acel nod este nulă:

$$\sum_{k \in (n)} I_k = 0.” \quad (2.10)$$

Caracterul algebric al sumei este impus de **atribuirea semnului plus pentru curenții care ies din nodul (n) și, respectiv, semnul minus pentru curenții care intră în acel nod.**

**A doua teoremă a lui Kirchhoff:** „Oricare ar fi un contur închis  $[\gamma]$ , suma algebrică a tensiunilor  $U_k$  de-a lungul aceluia contur este nulă:

$$\sum_{k \in [\gamma]} U_k = 0.” \quad (2.11)$$

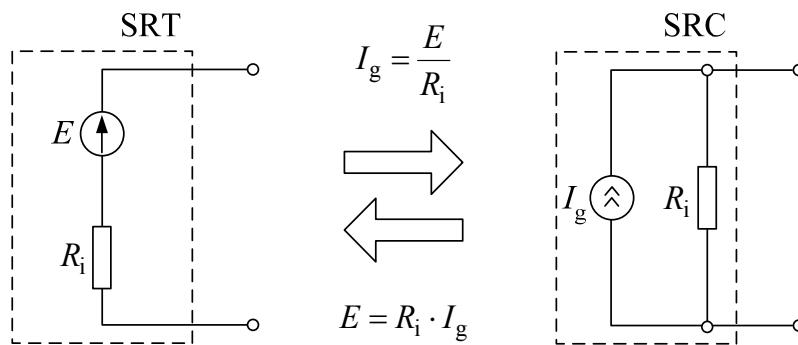
În cazul particular al unei bucle  $[b]$ , cea de-a doua teoremă a lui Kirchhoff ia forma:

$$\sum_{k \in [b]} R_k \cdot I_k + \sum_{k \in [b]} U_{sk} = \sum_{k \in [b]} E_k, \quad (2.12)$$

relație care arată ca **suma algebrică a tensiunilor la bornele rezistoarelor și surselor ideale de curent este egală cu suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale surselor ideale de tensiune.**

Caracterul algebric al celor trei sume din relația (2.12) este impus de necesitatea parcurgerii buclei [b] într-un anumit sens (arbitrar) și **atribuirea semnului plus tensiunilor  $R_k \cdot I_k$  la bornele tuturor rezistoarelor de rezistență  $R_k$  străbatute de curenții  $I_k$  în sensul de parcurgere, tensiunilor  $U_{s_k}$  (la bornele tuturor surselor de curent) al căror sens coincide cu sensul de parcurgere și tensiunilor electromotoare  $E_k$  (ale tuturor surselor de tensiune) ale căror săgeți sunt orientate în sensul de parcurgere (respectiv minus în caz contrar).**

**Teorema de echivalență între un dipol alcătuit dintr-un rezistor (de rezistență  $R$ ) în serie cu o sursă ideală de tensiune (având tensiunea**



**Figura 2.2.1**

**electromotoare  $E$ ) și un dipol alcătuit din același rezistor (de rezistență  $R$ ) în paralel cu o sursă ideală de curent (având curentul electromotor  $I_s$ ):** „Cei doi dipoli activi sunt echivalenți dacă sensurile săgeților mărimilor  $E$  și  $I_s$  sunt asociate ca în figura 2.2.1 și dacă este satisfăcută relația

$$R = \frac{E}{I_s} .” \quad (2.13)$$

Această teoremă va fi numită în continuare **teorema de echivalență între un dipol activ  $E, R$  serie și un dipol activ  $I_s, R$  paralel.**

**Teorema de echivalență a rezistoarelor conectate în serie:** „ $n$  rezistoare de rezistențe  $R_1, R_2, \dots, R_n$  conectate în serie în raport cu două borne admit în raport cu acele două borne un rezistor echivalent de rezistență

$$R_{es} = \sum_{k=1}^n R_k .” \quad (2.14)$$

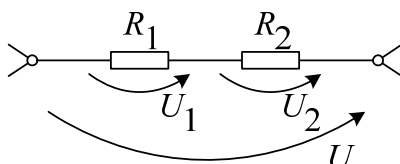
**Teorema de echivalență a rezistoarelor conectate în paralel:**

„ $n$  rezistoare de rezistențe  $R_1, R_2, \dots, R_n$  conectate în paralel în raport cu două borne admit în raport cu acele două borne un rezistor echivalent de rezistență

$$R_{ep} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}} \quad .” \quad (2.15)$$

**Teorema divizorului pasiv de tensiune:**

„Dacă  $R_1$  și  $R_2$  sunt rezistențele rezistoarelor care alcătuiesc un dipol pasiv serie alimentat cu tensiunea  $U$  (vezi figura 2.2.2),



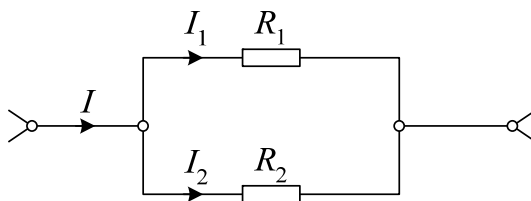
**Figura 2.2.2**

atunci tensiunile  $U_1$  și  $U_2$  la bornele fiecăruia dintre cele două rezistoare sunt date de relațiile

$$\begin{cases} U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U \\ U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U \end{cases} \quad .” \quad (2.16)$$

**Teorema divizorului pasiv de curent:**

„Dacă  $R_1$  și  $R_2$  sunt rezistențele rezistoarelor care alcătuiesc un dipol pasiv paralel care absoarbe un curent  $I$  (vezi figura 2.2.3),



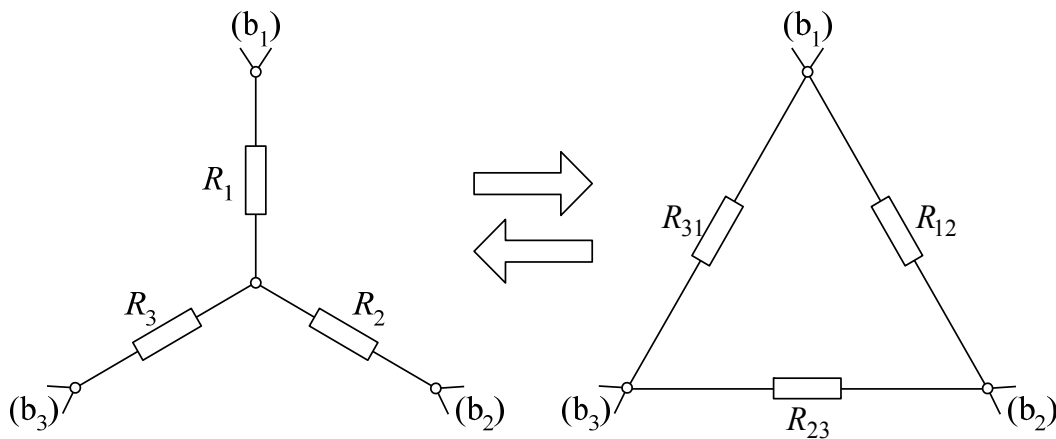
**Figura 2.2.3**

atunci curenții  $I_1$  și  $I_2$  care străbat fiecare dintre cele două rezistoare sunt dați de relațiile

$$\begin{cases} I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I \\ I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I \end{cases} \quad \text{„} \quad (2.17)$$

**Teoremele de transfigurare stea – triunghi și triunghi – stea** (vezi figura 2.2.4):

„Orice tripol pasiv alcătuit din rezistoarele de rezistențe  $R_1, R_2$  și  $R_3$



**Figura 2.2.4**

conectate în stea admite un tripol pasiv echivalent alcătuit din rezistoarele de rezistențe  $R_{12}, R_{23}$  și  $R_{31}$  conectate în triunghi care au valorile:

$$\begin{cases} R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_3} \\ R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1 + R_1 \cdot R_2}{R_1} \\ R_{31} = \frac{R_3 \cdot R_1 + R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3}{R_2} \end{cases} \quad (2.18)$$

La rândul său, orice tripol pasiv alcătuit din rezistoarele de rezistențe  $R_{12}, R_{23}$  și  $R_{31}$  conectate în triunghi admite un tripol pasiv echivalent alcătuit din rezistoarele de rezistențe  $R_1, R_2$  și  $R_3$  conectate în stea care au valorile:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{array} \right. \quad \text{„} \quad (2.19)$$

### **Teorema superpoziției:**

„Intensitatea curentului electric prin orice latură a unei rețele **liniare și active** (rețea conținând rezistoare liniare și surse ideale de tensiune și de curent) este suma algebrică a intensităților curenților pe care i-ar stabili în acea latură fiecare dintre surse dacă s-ar găsi doar ea în circuit, celelalte surse fiind **pasivizate**.”

**Operațiunea de pasivizare a unei surse constă în substituirea acesteia cu un rezistor având rezistența egală cu rezistența internă a sursei.** Întrucât rezistența internă a unei surse ideale de tensiune este zero, iar rezistența internă a unei surse ideale de curent este infinită, **operațiunea de pasivizare a unei surse ideale de tensiune constă în substituirea acesteia cu un scurtcircuit, în timp ce operațiunea de pasivizare a unei surse ideale de curent constă în substituirea acesteia cu un gol.**

**Teorema lui Vashy pentru surse de tensiune (prima teoremă a lui Vashy):** „Distribuția de curenți și de tensiuni pentru toate elementele dipolare ale unui circuit nu se modifică dacă se introduc în serie cu toate elementele conectate la un nod, oricare, al circuitului, surse ideale de tensiune având tensiuni electromotoare egale și la fel orientate față de nodul respectiv.”

**Teorema lui Vashy pentru surse de curent (a doua teoremă a lui Vashy):** „Distribuția de curenți și de tensiuni pentru toate elementele dipolare ale unui circuit nu se modifică dacă se introduc în paralel cu toate laturile ce alcătuiesc un ochi, oricare, al circuitului, surse ideale de curent injectând curenți egali și la fel orientați în raport cu un sens arbitrar de parcurgere a ochiului respectiv.”

Subliniem însă faptul că prin utilizarea primei teoreme a lui Vashy se **modifică tensiunile laturilor** afectate de sursele ideale de tensiune nou introduse, iar prin utilizarea celei de-a doua teoreme a lui Vashy se **modifică curenții laturilor** afectate de sursele ideale de curent nou introduse.

**Teorema generatorului echivalent de tensiune (teorema Helmholtz-Thévenin)** permite calculul curentului  $I_{AB}$  ce străbate un rezistor de rezistență  $R_{AB}$  conectat între două borne (A) și (B), oricare, ale unei rețele liniare și active, cu ajutorul relației

$$I_{AB} = \frac{U_{AB\text{gol}}}{R_{AB} + R_{AB0}}. \quad (2.20)$$

În această relație  $R_{AB0}$  reprezintă rezistența echivalentă a rețelei pasivizate în raport cu bornele (A) și (B) după eliminarea rezistorului de rezistență  $R_{AB}$ , iar  $U_{AB\text{gol}}$  reprezintă tensiunea de mers în gol, adică tensiunea care se stabilește între bornele (A) și (B) atunci când rezistorul de rezistență  $R_{AB}$  este scos (sau când curentul prin el este nul), restul rețelei active nefiind modificat.

**Teorema generatorului echivalent de curent (teorema lui Norton)** permite calculul tensiunii  $U_{AB}$  la bornele rezistorului de rezistență  $R_{AB}$  cu ajutorul relației

$$U_{AB} = \frac{I_{AB\text{sc}}}{G_{AB} + G_{AB0}}, \quad (2.21)$$

în care  $G_{AB} = R_{AB}^{-1}$ ,  $G_{AB0}$  reprezintă conductanța echivalentă a rețelei pasivizate în raport cu bornele (A) și (B) după eliminarea rezistorului de rezistență  $R_{AB}$  (deci  $G_{AB0} = R_{AB0}^{-1}$ ), iar  $I_{AB\text{sc}}$  reprezintă curentul de scurtcircuit (curentul care străbate un scurtcircuit realizat între bornele (A) și (B) când restul rețelei active rămâne nemodificat.

### **Teorema substituției**

„Orice element dipolar de circuit, străbătut de un curent  $I$  și având la borne o tensiune  $U$  cu valori și sensuri precizate, poate fi **substituit** fie cu o sursă ideală de tensiune, fie cu o sursă ideală de curent (figura 2.2.5) care să asigure ecuațiile de funcționare  $E = U$  și, respectiv,  $I_g = I$  și să nu modifice regimul energetic al acestuia.”



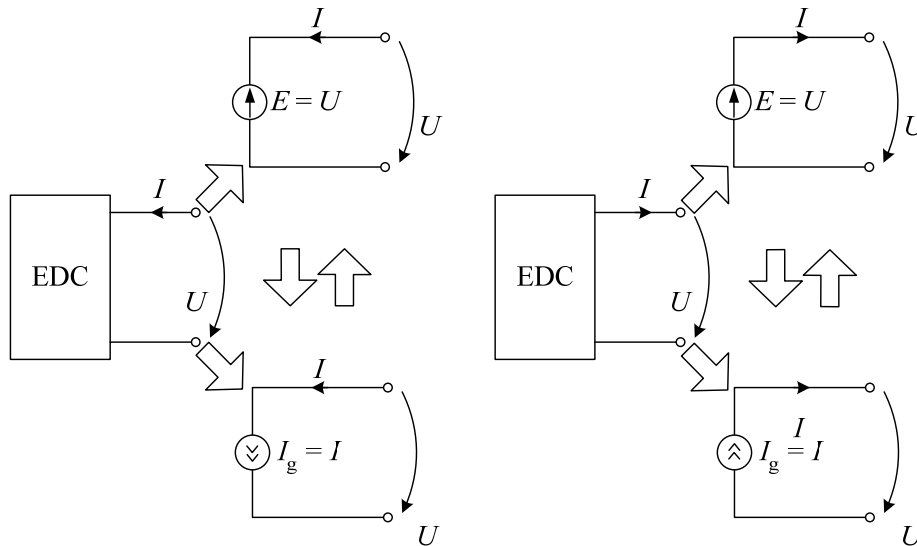


Figura 2.2.5

Se remarcă faptul că această teoremă dă posibilitatea substituirii surselor ideale de tensiune și de curent între ele, însă **substituția nu se poate efectua decât într-o rețea dată și pentru un punct de funcționare  $(I, U)$  precizat.**

### Teorema de conservare a puterilor

„Pentru orice rețea activă și izolată, suma algebrică a puterilor furnizate de toate sursele ideale de tensiune și de curent este egală cu suma aritmetică a puterilor disipate în toate rezistoarele rețelei:

$$\sum_{(j)} E_j \cdot I_j + \sum_{(i)} U_{gi} \cdot I_{gi} = \sum_{(k)} R_k \cdot I_k^2 \quad (2.22)$$

În sumele algebrice din membrul stâng al egalității (2.22) produsele  $E_j \cdot I_j$  și  $U_{gi} \cdot I_{gi}$  se iau cu semnul plus sau minus după cum sensurile de referință ale mărimilor tensiunii și curenților la bornele surselor corespund asocierii acestora după convenția de la generatoare sau după convenția de la receptoare (vezi figura 2.2.6).

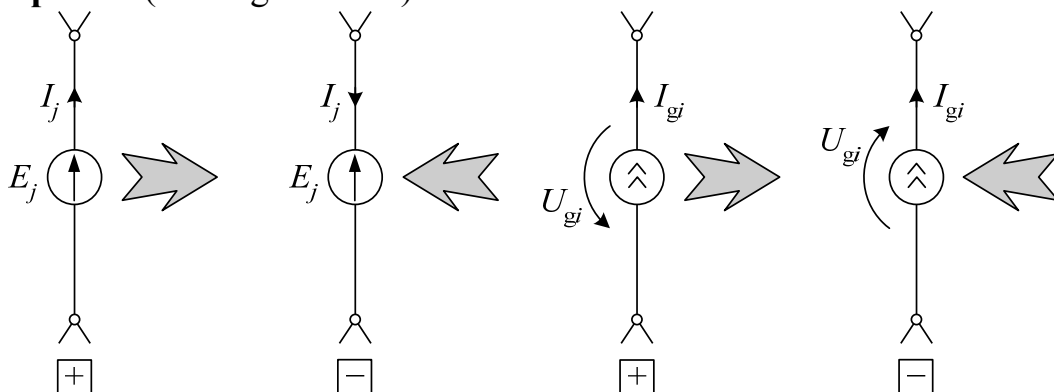


Figura 2.2.6

În continuare, se vor adopta notațiile:

$$P_{\text{gen}} = \sum_{(j)} \mathcal{A} E_j \cdot I_j + \sum_{(i)} \mathcal{A} U_{g_i} \cdot I_{g_i} \quad (2.22')$$

pentru membrul stâng al egalității (2.22) și

$$P_{\text{rez}} = \sum_{(k)} R_k \cdot I_k^2 \quad (2.22'')$$

pentru membrul drept al egalității (2.22).

**Teorema puterilor încrucișate:** „În orice rețea de curent continuu izolată care poate funcționa în două regimuri distincte (marcate prin indicii (1) și, respectiv, (2)), între mărimile tensiuni electromotoare  $E_j$ , curenți  $I_j$  ce străbat sursele ideale de tensiune, injecții de curent  $I_{g_j}$  și tensiuni  $U_{g_j}$  la bornele surselor ideale de curent există relația:

$$\sum_{(j)} \mathcal{A} E_j^{(1)} \cdot I_j^{(2)} + \sum_{(j)} \mathcal{A} U_{g_j}^{(1)} \cdot I_{g_j}^{(2)} = \sum_{(j)} \mathcal{A} E_j^{(2)} \cdot I_j^{(1)} + \sum_{(j)} \mathcal{A} U_{g_j}^{(2)} \cdot I_{g_j}^{(1)} .” \quad (2.23)$$

Atribuirea semnului plus ori minus pentru fiecare dintre termenii sumelor algebrice corespunde asocierii **încrucișate** a sensurilor reale ale mărimilor la bornele surselor ideale din cele două regimuri după convenția de la generatoare ori după convenția de la receptoare.

### 2.3. Metode sistematice de analiză a circuitelor de curent continuu

Presupunând că avem de-a face cu o rețea izolată cu  $L$  laturi (dintre care  $L_s$  conțin surse ideale de curent) și  $N$  noduri, printr-o metodă sistematică de analiză a acestei rețele se înțelege o metodă aplicabilă oricare ar fi configurația sa topologică și oricare ar fi valorile și orientările săgeților tensiunilor electromotoare  $E_k$  ale surselor ideale de tensiune, valorile și orientările săgeților curenților electromotori  $I_{s_k}$  ai surselor ideale de curent și valorile rezistențelor  $R_k$  ale rezistoarelor, în scopul determinării curenților  $I_k$  ai laturilor și tensiunilor  $U_{s_k}$  la bornele surselor ideale de curent.

Numărul mărimilor necunoscute este  $L$ ; dintre acestea  $L-L_s$  sunt curenții  $I_k$  ai laturilor care nu conțin surse de curent, iar  $L_s$  sunt tensiunile  $U_{s_k}$  la bornele surselor de curent.

**Metoda teoremelor lui Kirchhoff** constă în rezolvarea unui sistem de ecuații independente de forma

$$\begin{cases} \sum_{k \in (n)} I_k = 0 \\ \sum_{k \in [b]} R_k \cdot I_k + \sum_{k \in [b]} U_{sk} = \sum_{k \in [b]} E_k, \end{cases} \quad (2.24)$$

în necunoscutele  $I_k$  și  $U_{sk}$ .

### Observații

1. O parte dintre curenții  $I_k$  (și anume cei  $L_s$  curenți  $I_{sk}$ ) sunt cunoscuți conform ecuațiilor de funcționare ale surselor de curent.
2. **Numărul de ecuații independente de tip Kirchhoff I este  $N_f = N - 1$ , în timp ce numărul de ecuații de tip Kirchhoff II este  $B_f = L - N + 1$  și corespunde unui sistem de bucle fundamentale ales opțional.**

### Aplicația 2.1

Folosind teoremele lui Kirchhoff, să se determine intensitățile curenților care străbat laturile și tensiunile la bornele generatoarelor de curent. Să se calculeze tensiunea între punctele (A) și (B) și să se verifice bilanțul puterilor pentru circuitul din figura A.2.1,a.

**Soluție.** Vom prezenta în continuare un algoritm de rezolvare sistematică a unei rețele de curent continuu izolate, având  $N$  noduri și  $L$  laturi (dintre care  $L_g$  conțin surse ideale de curent).

Apelând la conceptele prezentate în **paragraful 1.1**, se remarcă faptul că atașarea câte unei corzi la arbore conduce la apariția câte unei bucle. Cum numărul de corzi este  $C = L - N + 1 = B$  se poate utiliza următorul **algoritm de generare a unui sistem de bucle fundamentale**:

- se numără laturile ( $L$ ) și nodurile ( $N$ ) rețelei
- se calculează numărul de ramuri ale arborelui cu relația  $R = N - 1$
- se alege configurația arborelui
- se completează arborele cu câte o coardă, formându-se câte o buclă.

Buclele generate în acest mod asigură ambele cerințe impuse de definiția unui sistem de bucle fundamentale: numărul lor și acoperirea tuturor laturilor rețelei.

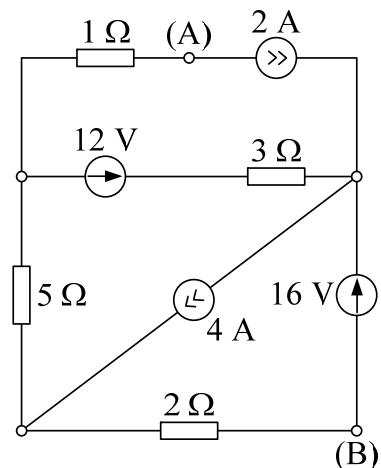


Figura A.2.1,a

Cu ajutorul ecuațiilor (2.24) ne propunem să determinăm cei  $L-L_g$  curenți  $I_k$  ce străbat laturile care nu conțin generatoare ideale de curent și cele  $L_g$  tensiuni  $U_{gk}$  la bornele generatoarelor ideale de curent.

**Unicitatea soluției problemei** în condițiile liniarității ecuațiilor lui Kirchhoff în necunoscutele  $I_k$  și  $U_{gk}$  (necunoscute al căror număr total este  $L$ ) este asigurată de scrierea unui număr de  $L$  de ecuații independente.

Euler a demonstrat că numărul ecuațiilor independente de tip Kirchhoff I este  $N-1$ , iar numărul ecuațiilor independente de tip Kirchhoff II este  $L-N+1$ . Dacă renunțarea la unul dintre nodurile rețelei nu prezintă nicio dificultate oricare ar fi gradul de complexitate al configurației topologice a circuitului, în schimb alegerea celor  $B=L-N+1$  bucle distincte care să acopere toate laturile rețelei poate fi foarte laborioasă. Remarcând însă faptul că un sistem de bucle fundamentale asigură cerințele de independență a acestora și că generarea lor se poate realiza relativ simplu (folosind algoritmul prezentat anterior), se poate merge și mai departe cu organizarea sistemului de  $L$  ecuații cu  $L$  necunoscute (dintre care  $L-L_g$  curenți  $I_k$  și  $L_g$  tensiuni  $U_{gk}$ ), după cum urmează.

Se alege configurația arborelui de așa manieră încât să nu conțină laturile ramuri cu generatoare de curent și apoi se completează arborele pe rând cu câte o coardă, începând cu acelea care nu conțin surse de curent.

În acest fel sistemul de  $L$  ecuații independente va cuprinde un prim set de  $L-L_g$  ecuații (dintre care  $N-1$  de tip Kirchhoff I și  $L-L_g-N+1$  de tip Kirchhoff II) în care apar numai cele  $L-L_g$  necunoscute curenții  $I_k$  și un al doilea set de  $L_g$  ecuații (numai de tip Kirchhoff II) în care apar și necunoscutele tensiuni  $U_{gk}$ . Primele  $L-L_g$  ecuații dau valorile celor  $L-L_g$  necunoscute curenți  $I_k$ , iar aceștia, odată determinați, devin cunoscute ale celorlalte  $L_g$  ecuații în care rămân ca necunoscute doar tensiunile  $U_{gk}$ . Mai mult, fiecare dintre aceste ultime  $L_g$  ecuații conține doar câte una dintre necunoscutele  $U_{gk}$ , ceea ce ușurează considerabil efortul de calcul.

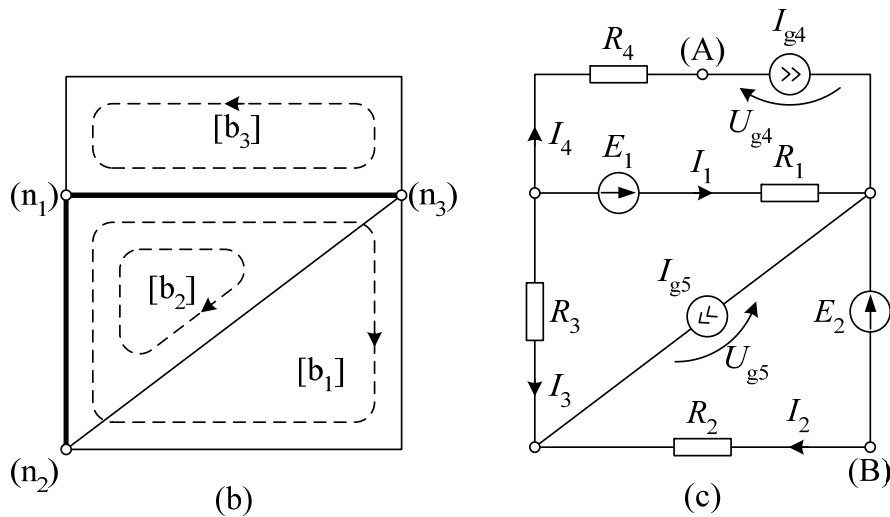
Sistematizând cele prezentate anterior, recomandăm parcurgerea următoarelor etape ale algoritmului de rezolvare a unei rețele de curent continuu utilizând teoremele lui Kirchhoff:

- se numără nodurile ( $N$ ) și laturile ( $L$ ) rețelei, laturi dintre care  $L_g$  conțin generatoare ideale de curent;
- se numerotează laturile, începând cu acelea care nu conțin surse ideale de curent, atribuind indicele laturii mărimilor ce caracterizează elementele de circuit de pe acea latură;
- se calculează numărul de ramuri cu relația  $R=N-1$  și se alege configurația acestuia astfel încât să nu conțină laturi-ramuri cu generatoare de curent, dar să conțină laturi posedând un număr minim de rezistoare;

- se completează arborele, pe rând, cu câte o coardă (formându-se în acest fel câte o buclă), operațiunea începând cu corzile care nu conțin surse ideale de curent;
- se aleg (arbitrar) sensuri de referință pentru cei  $L-L_g$  curenți necunoscuți și pentru cele  $L_g$  tensiuni necunoscute;
- se scriu ecuațiile corespunzătoare primei teoreme a lui Kirchhoff pentru  $N-1$  dintre cele  $N$  noduri ale rețelei;
- se scriu ecuațiile corespunzătoare celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff, în ordinea în care au fost generate buclele fundamentale, cu mențiunea că, odată ales sensul de parcurgere al fiecărei bucle, **este utilă parcurgerea acesteia de trei ori**, urmărindu-se pe rând rezistoarele, sursele ideale de curent și apoi sursele ideale de tensiune;
- se rezolvă sistemul format din primele  $L-L_g$  ecuații care conțin numai cele  $L-L_g$  necunoscute curenți;
- se introduc valorile curenților (determinate în etapa anterioară) în ultimele  $L_g$  ecuații ale sistemului și se determină tensiunile (la bornele surselor ideale de curent) necunoscute;
- se verifică și se interpretează rezultatele obținute prin realizarea grafurilor orientate de curenți și de tensiuni; **graful orientat al curenților** se obține din graful neorientat al circuitului pe care se orientează laturile conform unor sensuri de referință alese arbitrar pentru curenții ce străbat laturile; **graful orientat al tensiunilor** se obține din graful neorientat pe care se orientează laturile conform unor sensuri de referință arbitrar pentru tensiunile la bornele laturilor (pe acesta pot fi evidențiate, prin utilizarea ecuațiilor de funcționare ale elementelor dipolare de circuit, și tensiunile la bornele tuturor elementelor și apoi se pot determina tensiuni între oricare două puncte ale rețelei folosindu-se teorema a doua a lui Kirchhoff în formă topologică);
- se verifică bilanțul puterilor.

Circuitul propus în figura A.2.1,a are  $N = 3$  noduri,  $L = 5$  laturi și  $L_g = 2$  laturi cu surse ideale de curent, iar arborele atașat are  $R = 2$  ramuri.

Arborele ales (neconținând laturi cu generatoare de curent), marcat pe graful neorientat al circuitului cu linie îngroșată (figura A.2.1,b), se completează pe rând cu câte o coardă, începând cu corzile care nu conțin surse de curent. Se generează astfel, în ordine, buclele fundamentale  $[b_1]$ ,  $[b_2]$  și  $[b_3]$ , cărora li se atribuie câte un sens arbitrar de parcurgere.



**Figura A.2.1**

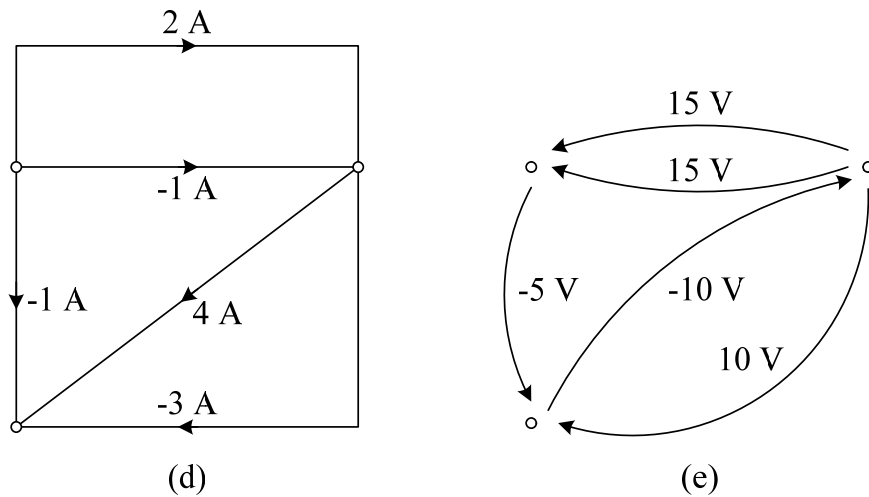
Întrucât pentru rezolvarea problemei este necesară atribuirea unor indici mărimilor necunoscute, este util ca alegerea acestora să se facă în așa fel încât niciunul dintre indicii tensiunilor la bornele surselor de curent să nu coincidă cu vreunul dintre indicii curenților laturilor care nu conțin surse de curent.

O facilitate suplimentară o poate constitui atribuirea unor simboluri literale și mărimilor cunoscute astfel încât indicii acestora să sugereze numerele de ordine ale laturilor, de exemplu  $E_1 = 12 \text{ V}$ ,  $E_2 = 16 \text{ V}$ ,  $R_1 = 3 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \Omega$ ,  $R_4 = 1 \Omega$ ,  $I_{g4} = 2 \text{ A}$  și  $I_{g5} = 4 \text{ A}$ . În aceste condiții mărimile necunoscute vor fi notate  $I_1, I_2, I_3, U_{g4}$  și  $U_{g5}$ , iar sensurile lor de referință sunt opționale.

Odată alese aceste sensuri de referință (figura A.2.1,c) se scriu cele cinci ecuații ale sistemului, două de tip Kirchhoff I (pentru nodurile  $(n_1)$  și  $(n_2)$ ), evitându-se în general unul dintre nodurile la care concură cele mai multe laturi) și trei de tip Kirchhoff II (în ordinea în care au fost generate):

$$\begin{cases} (n_1) & + I_1 + I_3 + I_{g4} = 0 \\ (n_2) & - I_2 - I_3 - I_{g5} = 0 \\ [b_1] & + R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 = +E_1 - E_2 \\ [b_2] & + R_1 \cdot I_1 - R_3 \cdot I_3 - U_{g5} = +E_1 \\ [b_3] & + R_1 \cdot I_1 - R_4 \cdot I_{g4} + U_{g4} = +E_1 \end{cases}$$

Rezolvarea sistemului alcătuit din primele trei ecuații dă soluția pentru curenți:  $I_1 = -1 \text{ A}$ ,  $I_2 = -3 \text{ A}$ ,  $I_3 = -1 \text{ A}$ . Cu aceste valori introduse în ultimele două ecuații se determină și valorile tensiunilor la bornele generatoarelor ideale de curent:  $U_{g4} = 17 \text{ V}$  și  $U_{g5} = -10 \text{ V}$ .



**Figura A.2.1**

În figurile A.2.1,d și A.2.1,e sunt prezentate grafurile orientate de curenți și, respectiv, de tensiuni atașate grafului neorientat din figura A.2.1,b.

În figura A.2.1,f sunt evidențiate și tensiunile la bornele fiecărui element dipolar.

Tensiunea  $U_{AB}$  între punctele (A) și (B) este calculată cu ajutorul teoremei a doua a lui Kirchhoff scrisă în formă topologică pe conturul marcat punctat:

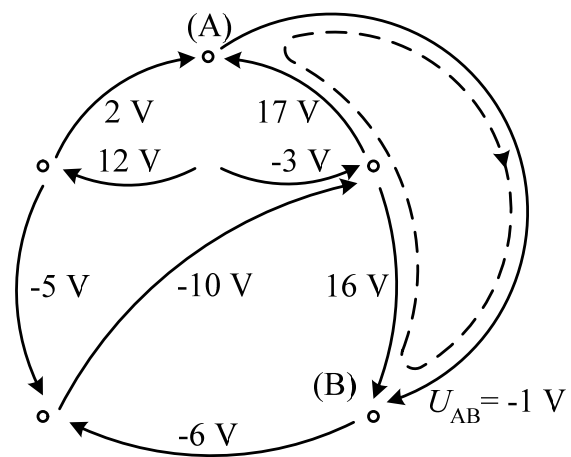
$$U_{AB} - 16 \text{ V} + 17 \text{ V} = 0,$$

rezultând  $U_{AB} = -1 \text{ V}$ .

Pentru ca suma algebrică a tensiunilor să conțină un număr cât mai mic de termeni, este util să se aleagă unul dintre contururile cele mai „scurte” din punct de vedere al numărului de tensiuni pe care îl cuprinde.

Din examinarea grafurilor orientate ale curenților și ale tensiunilor se constată că sursele  $E_1$  și  $I_{g4}$  generează putere, în timp ce sursele  $E_2$  și  $I_{g5}$  absorb putere pe la bornele lor.

Ca atare, suma algebrică a puterilor debitate de surse este:



**Figura A.2.1,f**

$$P_s = \sum_{j=1}^2 E_j \cdot I_j + \sum_{j=1}^2 U_{g_j} \cdot I_{g_j} =$$

$$= +E_1 \cdot I_1 - E_2 \cdot I_2 + U_{g4} \cdot I_{g4} + U_{g5} \cdot I_{g5} = 30 \text{ W},$$

iar suma puterilor disipate în rezistoare este:

$$P_r = \sum_{j=1}^4 R_j \cdot I_j^2 = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 + R_4 \cdot I_{g4}^2 = 30 \text{ W}.$$

Bilanțul puterilor este așadar verificat.

**Metoda curenților ciclici** utilizează un set de necunoscute primare auxiliare – **curenții ciclici** (care se mai numesc și curenți de buclă sau de contur) care sunt niște curenți de calcul (fictivi) atașați câte unul pentru fiecare dintre cele  $B_f = L - N + 1$  bucle fundamentale ale rețelei. Ei sunt definiți ca având proprietatea de a străbate cu o aceeași valoare toate laturile care alcătuiesc bucla respectivă. În acest fel, **prin superpoziție, un curent prin oricare dintre laturile circuitului este suma algebrică a curenților ciclici care trec prin acea latură** și, ca atare, în cazul particular în care o latură este parcursă de un singur curent ciclic acesta este egal cu curentul acelei laturi.

**Dacă rețeaua studiată nu conține surse de curent**, atunci sistemul de ecuații pe care îl satisfac curenții de buclă, notați  $I'_1, I'_2, \dots, I'_{L-N+1}$ , este

$$\begin{cases} R_{1,1} \cdot I'_1 + R_{1,2} \cdot I'_2 + \dots + R_{1,L-N+1} \cdot I'_{L-N+1} = E'_1 \\ R_{2,1} \cdot I'_1 + R_{2,2} \cdot I'_2 + \dots + R_{2,L-N+1} \cdot I'_{L-N+1} = E'_2 \\ \vdots \\ R_{L-N+1,1} \cdot I'_1 + R_{L-N+1,2} \cdot I'_2 + \dots + R_{L-N+1,L-N+1} \cdot I'_{L-N+1} = E'_{L-N+1}, \end{cases} \quad (2.25)$$

în care, pentru orice  $p, q \in \{1, 2, \dots, L - N + 1\}$ :

- coeficienții  $R_{p,p}$  reprezintă suma rezistențelor rezistoarelor de pe laturile care formează bucla cu numărul de ordine  $p$  (întotdeauna  $R_{p,p} > 0$ );
- coeficienții  $R_{p,q} = R_{q,p}$  reprezintă suma rezistențelor rezistoarelor de pe laturile comune buclelor având numerele de ordine  $p$  și  $q$ , sumă luată cu semnul plus sau minus după cum curenții ciclici  $I'_p$  și  $I'_q$  străbat acele laturi în același sens sau în sensuri opuse; dacă buclele cu numerele de ordine  $p$  și  $q$  nu au laturi



comune ori dacă laturile comune conțin doar surse ideale de tensiune, atunci  $R_{p,q} = R_{q,p} = 0$ ;

- coeficienții  $E'_p$  reprezintă suma algebrică a tensiunilor electromotoare corespunzătoare surselor ideale de tensiune de pe laturile aparținând buclei cu numărul de ordine  $p$  (luate cu semnul plus dacă sensurile săgeților tensiunilor electromotoare coincid cu sensul arbitrar ales pentru curentul ciclic  $I'_p$  și, respectiv, cu semnul minus în caz contrar).

**Dacă rețeaua conține și  $L_s$  laturi cu surse de curent** atunci se va alege sistemul de bucle independente astfel încât niciuna dintre aceste bucle să nu conțină mai mult decât o latură cu sursă de curent. În acest fel oricare dintre cele  $B_f = L - N + 1$  bucle fundamentale se va încadra în una dintre următoarele două categorii: categoria buclelor care nu conțin laturi cu surse de curent (numărul acestora fiind  $L - L_s - N + 1$ ) și categoria buclelor care conțin câte o singură latură cu sursă de curent (numărul acestora fiind  $L_s$ ).

Ecuția corespunzătoare unei bucle cu numărul de ordine  $k$  din prima categorie va fi de tipul (2.25), adică

$$R_{k,1} \cdot I'_1 + R_{k,2} \cdot I'_2 + \dots + R_{k,L-N+1} \cdot I'_{L-N+1} = E'_k, \quad (2.25')$$

în timp ce ecuația corespunzătoare unei bucle cu numărul de ordine  $j$  din cea de-a doua categorie va fi

$$I'_j = I_{sh} \quad (2.26)$$

dacă se alege curentul ciclic  $I'_j$  cu sensul coincidând prin latura cu numărul de ordine  $h$  cu sensul curentului electromotor  $I_{sh}$ .

După determinarea curenților ciclici se calculează prin superpoziție curenții tuturor laturilor, iar apoi se găsesc cele  $L_s$  tensiuni  $U_{sh}$  la bornele surselor de curent cu ajutorul celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff: ecuațiile de tip Kirchhoff II vor fi scrise pe rând pentru cele  $L_s$  bucle din cea de-a doua categorie și vor conține fiecare numai câte una dintre tensiunile  $U_{sh}$ .

### Aplicația 2.3

Pentru circuitul din figura A.2.2,a să se determine intensitățile curenților care străbat laturile și tensiunile la bornele surselor de curent, utilizându-se metoda curenților ciclici. Să se verifice apoi corectitudinea rezultatelor obținute

cu ajutorul bilanțului de puteri. Se cunosc valorile  $R_1 = 3 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 4 \Omega$ ,  $R_4 = 5 \Omega$ ,  $R_5 = 1 \Omega$ ,  $E_1 = 8 \text{ V}$ ,  $E_2 = 30 \text{ V}$ ,  $E_3 = 3 \text{ V}$ ,  $I_{g5} = 2 \text{ A}$ ,  $I_{g6} = 2 \text{ A}$ .

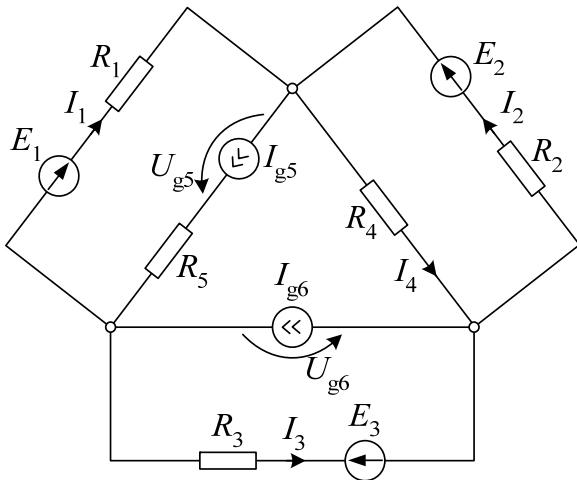


Figura A.2.2,a

**Soluție.** În expunerea teoretică s-a arătat algoritmul de rezolvare a unei rețele de curent continuu prin folosirea metodei curenților ciclici, atunci când rețeaua (având  $L$  laturi și  $N$  noduri) nu conține laturi cu surse ideale de curent. Dacă acesta conține și laturi cu surse ideale de curent (fie  $L_g$  numărul acestora), se poate proceda în unul din următoarele moduri.

1) Se generează buclele fundamentale optându-se pentru un arbore **care să nu conțină** laturi-

ramuri cu generatoare de curent. Prin completarea acestuia, pe rând, cu câte o coardă, începând cu acele corzi care nu conțin generatoare de curent, ultimele  $L_g$  ecuații ale sistemului iau formule particulare

$$I'_k = I_{g_j}; \quad j = 1, 2, \dots, L_g$$

fiecare dintre laturile cu surse de curent fiind parcursă de câte un singur curent ciclic  $I'_k$  a cărui orientare este în sensul injecției de curent  $I_{g_j}$ . Introducând cele  $L_g$  valori cunoscute  $I'_k$  în primele  $B - L_g$  ecuații ale sistemului, efortul de calcul scade în mod simțitor. Mai rămân de determinat cele  $L_g$  necunoscute – tensiunile la bornele generatoarelor ideale de curent care, după aflarea curenților care străbat laturile, se găsesc fără dificultate, utilizându-se pe contururi închise convenabil alese teorema a doua a lui Kirchhoff.

2) Se utilizează teorema substituției, înlocuindu-se sursele ideale de curent cu surse ideale de tensiune. În acest fel **apar**  $L_g$  **necunoscute suplimentare** (tensiunile electromotoare ale noilor surse ideale de tensiune, care nu reprezintă altceva decât tensiunile la bornele generatoarelor ideale de curent substituite), **dar și**  $L_g$  **noi ecuații** corespunzătoare laturilor cu generatoare de curent:

$$\sum_{k=1}^B I'_k = I_{g_j}; \quad j = 1, 2, \dots, L_g,$$

oricare ar fi alegerea sistemului de bucle fundamentale. Și în acest caz este recomandabil să se opteze pentru un arbore care să nu aibă laturi-ramuri care înainte de substituție conțineau surse ideale de curent. Prin această alegere, în

cele  $L_g$  noi ecuații, în locul sumelor algebrice ale curenților ciclici va apărea un singur termen:

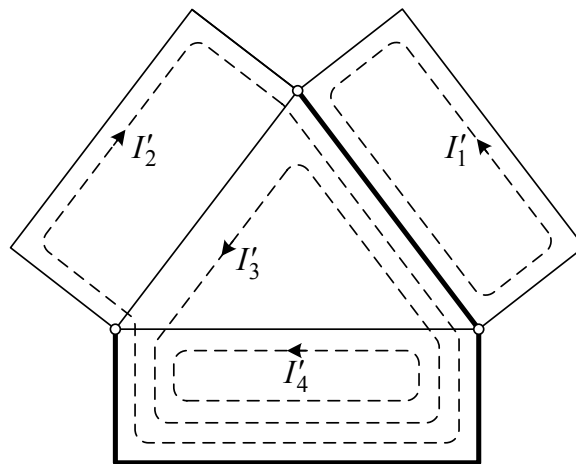
$$I'_k = I_{g_j} ; j = 1, 2, \dots, L_g,$$

dacă sensul curenților ciclici  $I'_k$  coincide prin latură cu numărul de ordine  $j$  cu sensul injecției  $I_{g_j}$ .

Ilustrăm în continuare utilizarea acestor două modalități de abordare a problemei pentru circuitul ilustrat în figura A.2.2,a.

1) Constatând că circuitul supus analizei conține laturi cu surse de curent, cele  $B=L-N+1=4$  bucle independente vor fi alese astfel încât niciuna dintre aceste bucle să nu conțină mai mult decât o latură cu sursă de curent.

Un exemplu de alegere a sistemului de bucle fundamentale și a curenților ciclici corespunzători este prezentat în figura A.2.2,b. Acestei configurații îi corespunde următorul sistem de ecuații:



**Figura A.2.2,b**

$$\begin{cases} R_{11} \cdot I'_1 + R_{12} \cdot I'_2 + R_{13} \cdot I'_3 + R_{14} \cdot I'_4 = E'_1 \\ R_{21} \cdot I'_1 + R_{22} \cdot I'_2 + R_{23} \cdot I'_3 + R_{24} \cdot I'_4 = E'_2 \\ I'_3 = I_{g5} \\ I'_4 = I_{g6} \end{cases}$$

cu  $R_{11} = R_2 + R_4 = 7 \Omega$ ,  $R_{22} = R_1 + R_4 + R_3 = 12 \Omega$ ,  $R_{12} = R_{21} = R_4 = -5 \Omega$ ,  
 $R_{13} = R_4 = 5 \Omega$ ,  $R_{14} = 0 \Omega$ ,  $R_{23} = -(R_4 + R_3) = -9 \Omega$ ,  $R_{24} = -R_3 = -4 \Omega$ ,  
 $E'_1 = -E_2 = -30 \text{ V}$ ,  $E'_2 = E_1 + E_3 = 11 \text{ V}$ .

Rezolvarea sistemului de mai sus se face rezolvând de fapt un sistem de două ecuații cu două necunoscute, obținându-se soluția  $I_1' = -5 \text{ A}$ ,  $I_2' = 1 \text{ A}$ ,  $I_3' = 2 \text{ A}$ ,  $I_4' = 2 \text{ A}$ .

Verificarea bilanțului puterilor arată că  $P_s = P_r = 173 \text{ W}$ .

**Metoda potențialelor nodurilor** utilizează și ea un set de necunoscute primare auxiliare – **potențialele**  $V_1, V_2, \dots, V_{N-1}$  **ale celor**  $N_f = N - 1$  **noduri independente ale rețelei**, potențiale raportate la cel de-al  $N$ -lea nod al rețelei ales ca referință ( $V_N = 0$ ). Odată aflate aceste potențiale, se determină mai întâi tensiunile la bornele laturilor având ca extremități nodurile ( $n_k$ ) și ( $n_j$ ) cu relațiile

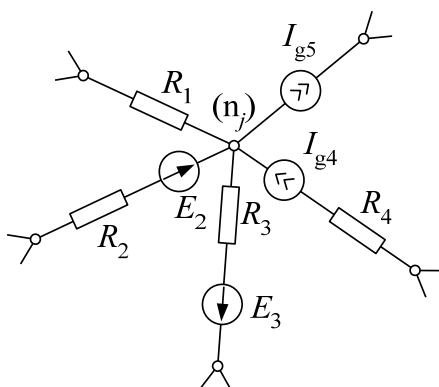
$$U_{kj} = V_k - V_j, \quad (2.27)$$

iar apoi curenții laturilor și tensiunile la bornele surselor de curent într-o succesiune dictată de configurația concretă a circuitului studiat.

**Dacă rețeaua analizată nu are laturi care să conțină numai surse ideale de tensiune**, atunci sistemul de ecuații pe care îl satisfac potențialele  $V_1, V_2, \dots, V_{N-1}$  este

$$\begin{cases} G_{1,1} \cdot V_1 + G_{1,2} \cdot V_2 + \dots + G_{1,N-1} \cdot V_{N-1} = I_{sc1} \\ G_{2,1} \cdot V_1 + G_{2,2} \cdot V_2 + \dots + G_{2,N-1} \cdot V_{N-1} = I_{sc2} \\ \vdots \\ G_{N-1,1} \cdot V_1 + G_{N-1,2} \cdot V_2 + \dots + G_{N-1,N-1} \cdot V_{N-1} = I_{scN-1} \end{cases} \quad (2.28)$$

în care, pentru orice  $j, k \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$ :



**Figura 2.3.1**

- coeficienții  $G_{j,j}$  reprezintă suma conductanțelor laturilor care concură în nodul cu numărul de ordine  $j$  (întotdeauna  $G_{j,j} > 0$ );
- coeficienții  $G_{j,k} = G_{k,j}$  reprezintă suma conductanțelor laturilor care leagă nodurile cu numerele de ordine  $k$  și  $j$ , sumă luată cu semnul minus;
- coeficienții  $I_{sc j}$  reprezintă injecția totală de curent în nodul cu numărul de ordine  $j$  și se calculează ca sumă algebrică a curenților de scurtcircuit ai laturilor care concură în acel nod, curenți de scurtcircuit luați cu semnul plus atunci când intră în nod și, respectiv, cu semnul minus atunci când ies din nod (contribuțiile diverselor laturi la injecția totală de curent într-un nod se determină prin câte o izolare fictivă a fiecăreia dintre aceste laturi și scurtcircuitarea bornelor sale).

În cazul nodului ( $n_j$ ) din figura 2.3.1, valorile parametrilor  $G_{j,j}$  și  $I_{sc j}$  sunt:

$$G_{j,j} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + 0 + 0 = G_1 + G_2 + G_3 > 0 \quad (2.29)$$

(întrucât conductanțele interne ale surselor ideale de curent sunt nule) și, respectiv,

$$I_{sc j} = 0 + \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3} + I_{sc4} - I_{sc5} = G_2 \cdot E_2 - G_3 \cdot E_3 + I_{sc4} - I_{sc5}. \quad (2.30)$$

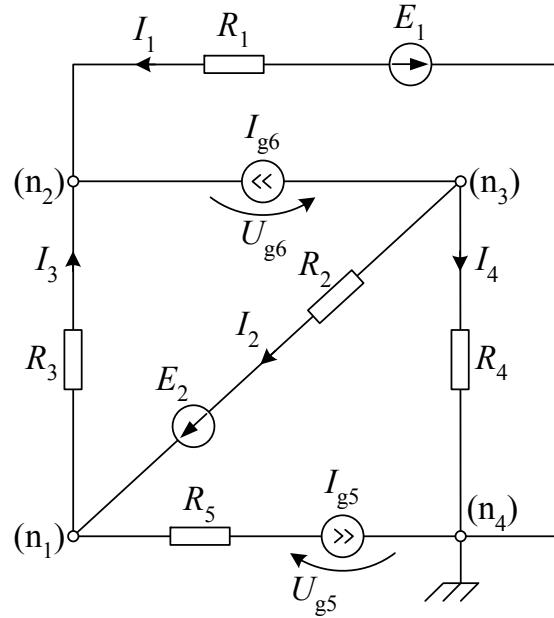
### Aplicația 2.3

Utilizând metoda potențialelor nodurilor să se determine intensitățile curenților laturilor și tensiunile la bornele surselor de curent pentru circuitul ilustrat în figura A.3.2. Să se verifice apoi corectitudinea rezultatelor obținute cu ajutorul bilanțului de puteri. Se cunosc valorile:  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 1 \Omega$ ,  $R_3 = 12 \Omega$ ,  $R_4 = 1 \Omega$ ,  $R_5 = 1 \Omega$ ,  $E_1 = 9 \text{ V}$ ,  $E_2 = 1 \text{ V}$ ,  $I_{g5} = 2 \text{ A}$ , și  $I_{g6} = 4 \text{ A}$ .

**Soluție.** Se utilizează algoritmul de rezolvare a unui circuit de curent continuu folosind metoda potențialelor nodurilor prezentată în prezentarea teoretică (rețeaua nu are laturi care să conțină numai surse ideale de tensiune).

Alegând unul dintre cele patru noduri ale rețelei ca origine a potențialelor (de exemplu  $V_4 = 0 \text{ V}$ ) sistemul de ecuații pe care îl satisfac potențialele  $V_1$ ,  $V_2$  și  $V_3$  ale celorlalte trei noduri este:

$$\begin{cases} G_{11} \cdot V_1 + G_{12} \cdot V_2 + G_{13} \cdot V_3 = I_{sc1} \\ G_{21} \cdot V_1 + G_{22} \cdot V_2 + G_{23} \cdot V_3 = I_{sc2} \\ G_{31} \cdot V_1 + G_{32} \cdot V_2 + G_{33} \cdot V_3 = I_{sc3} \end{cases},$$



**FiguraA.3.2**

în care (cu notațiile  $G_k = R_k^{-1}$ ):  $G_{11} = G_2 + G_3$ ,  $G_{22} = G_1 + G_3$ ,  $G_{33} = G_2 + G_4$ ,  
 $G_{12} = G_{21} = -G_3$ ,  $G_{23} = G_{32} = 0$ ,  $G_{31} = G_{13} = -G_2$ ,  $I_{sc1} = -I_{g5} + G_2 \cdot E_2$ ,  
 $I_{sc2} = I_{g6} - G_1 \cdot E_1$ ,  $I_{sc3} = -I_{g6} - G_2 \cdot E_2$ .

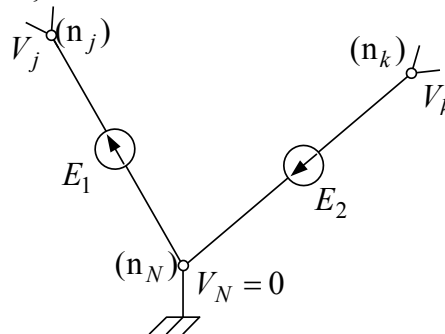
Cu valorile numerice propuse, soluția acestui sistem este  $V_1 = -15$  V,  $V_2 = -3$  V,  $V_3 = -5$  V. Curenții  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  și  $I_4$  și tensiunile  $U_{g5}$  și  $U_{g6}$  se determină din ecuațiile de funcționare ale laturilor după cum urmează:

$$I_1 = \frac{-V_2 - E_1}{R_1} = -3 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{V_3 - V_1 + E_2}{R_2} = 1 \text{ A}, \quad I_3 = \frac{V_1 - V_2}{R_3} = -1 \text{ A},$$

$$I_4 = \frac{V_3}{R_4} = -5 \text{ A}, \quad U_{g5} = R_5 \cdot I_{g5} - V_1 = 17 \text{ V} \quad \text{și} \quad U_{g6} = V_2 - V_3 = 2 \text{ V}.$$

Verificarea bilanțului de puteri conduce la obținerea valorilor egale  $P_s = P_r = 70$  W.

**Dacă rețeaua studiată are una sau mai multe laturi conținând numai câte o sursă ideală de tensiune și toate aceste laturi converg într-un același nod, atunci se alege ca referință a potențialelor acel nod comun. În acest fel, potențialele celorlalte noduri extremități ale acelor laturi vor fi cunoscute, fiind dictate de ecuațiile de funcționare ale surselor.**



**Figura 2.3.2**

În exemplul ilustrat în figura 2.3.2

$$V_j = +E_1, \quad (2.31)$$

iar

$$V_k = -E_2. \quad (2.32)$$

Ca atare, în sistemul (2.28) ecuațiile corespunzătoare nodurilor cu numerele de ordine  $j$  și  $k$  vor fi înlocuite cu ecuațiile (2.31) și, respectiv, (2.32).

Dacă rețeaua analizată are două sau mai multe laturi conținând numai câte o sursă ideală de tensiune, dar nu toate converg într-un același nod, atunci pentru rezolvarea problemei se utilizează alte metode.

În finalul prezentării metodelor sistematice de analiză a circuitelor de curent continuu vom reține că, pentru o rețea cu  $L$  laturi și  $N$  noduri, numărul de necunoscute cu care lucrează metoda teoremelor lui Kirchhoff (și, în consecință, ordinul sistemului liniar care trebuie rezolvat) este  $L$ , în timp ce metoda curenților de buclă lucrează cu  $B_f = L - N + 1$  necunoscute, iar metoda potențialelor nodurilor lucrează cu  $N_f = N - 1$  necunoscute. Numerele naturale  $L$ ,  $B_f$  și  $N_f$  satisfac relația

$$L = B_f + N_f, \quad (2.33)$$

ceea ce arată că metoda curenților ciclici și metoda potențialelor nodurilor sunt mai comode decât metoda teoremelor lui Kirchhoff întrucât sistemele liniare care trebuie rezolvate au grade mai mici decât  $L$ .

Mai mult, așa după cum s-a arătat anterior, dacă rețeaua studiată conține laturi cu surse ideale de curent și/sau laturi având în componență numai surse ideale de tensiune, o parte dintre necunoscutele aferente acestor două metode se găsesc direct, celelalte rămânând de determinat prin rezolvarea unor sisteme liniare: de ordinul  $\nu_{c.b.}$  (cu  $\nu_{c.b.} \leq B_f$ ) în metoda curenților de buclă și, respectiv, de ordinul  $\nu_{p.n.}$  (cu  $\nu_{p.n.} \leq N_f$ ) în metoda potențialelor nodurilor.

Pentru o rețea dată, o comparație între cele două metode din punct de vedere al efortului de calcul se poate face așadar prin calcularea numerelor naturale  $\nu_{c.b.}$  și  $\nu_{p.n.}$ , apreciindu-se ca fiind mai eficientă metoda care necesită rezolvarea unui sistem linear de ordinul

$$\nu = \min\{\nu_{c.b.}; \nu_{p.n.}\}. \quad (2.34)$$

## 2.4. Surse dependente (comandate)

Sursele comandate sunt acele surse la care mărimile furnizate de acestea **depind (sunt comandate)** de alte mărimi – curenți sau tensiuni – din circuit.

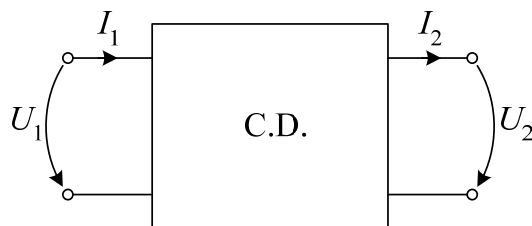


Figura 2.4.1

Din acest motiv o sursă comandată admite ca model un multipol cu patru borne de acces, numit **cuadripol diport** (notat CD în figura 2.4.1). Cele patru borne sunt grupate în două porți: **poarta de intrare**, la care mărimile la borne  $U_1$  și  $I_1$  sunt asociate ca sensuri de referință conform convenției de la receptoare, și **poarta de ieșire**, la care mărimile la borne  $U_2$  și  $I_2$  sunt asociate ca sensuri de referință conform convenției de la generatoare.

După cum poarta de intrare este un scurtcircuit ( $U_1 = 0$ ) sau un gol ( $I_1 = 0$ ), iar poarta de ieșire este un generator ideal de tensiune sau un generator ideal de curent, sursele comandate se clasifică în următoarele patru categorii (vezi figura 2.4.2):



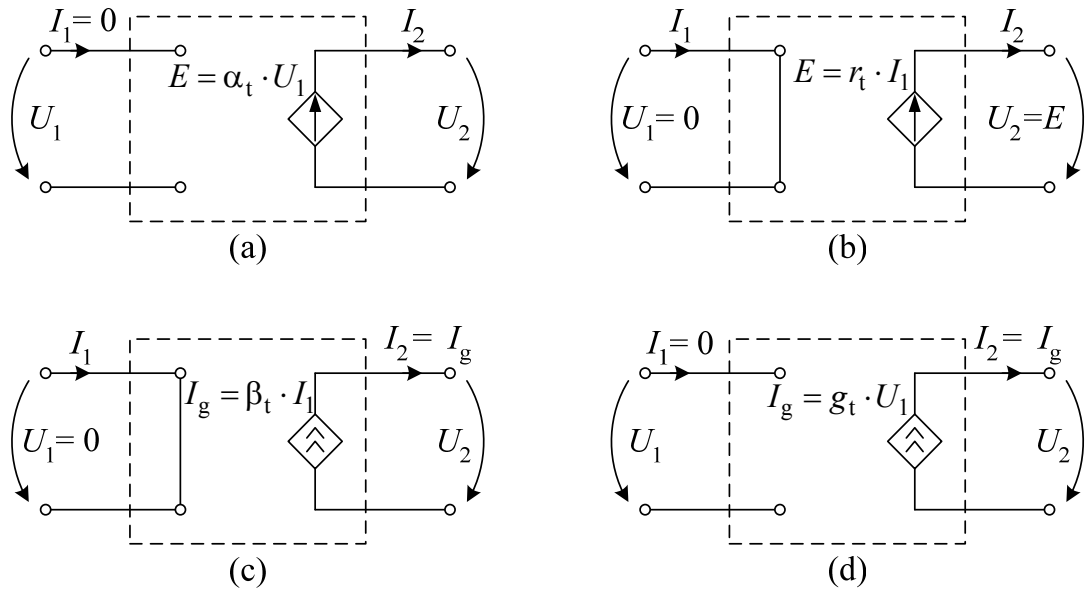


Figura 2.4.2

(a) **Sursa de tensiune comandată în tensiune**, care are ecuațiile de funcționare

$$U_2 = E = \alpha_t \cdot U_1; I_1 = 0 \quad (2.35)$$

(b) **Sursa de tensiune comandată în curent**, care are ecuațiile de funcționare

$$U_2 = E = r_t \cdot I_1; U_1 = 0 \quad (2.36)$$

(c) **Sursa de curent comandată în curent**, care are ecuațiile de funcționare

$$I_2 = I_s = \beta_t \cdot I_1; U_1 = 0 \quad (2.37)$$

(d) **Sursa de curent comandată în tensiune**, care are ecuațiile de funcționare

$$I_2 = I_s = g_t \cdot U_1; I_1 = 0 \quad (2.38)$$

Constantele  $\alpha_t$ ,  $r_t$ ,  $\beta_t$  și  $g_t$  sunt **mărimi de transfer între poarta de intrare și poarta de ieșire** și au următoarele semnificații:

- $\alpha_t = \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{I_1=0}$  se numește **factor** (adimensional) **de transfer în tensiune**
- $r_t = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{U_1=0}$  se numește **rezistență de transfer**
- $\beta_t = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{U_1=0}$  se numește **factor** (adimensional) **de transfer în curent**
- $g_t = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{I_1=0}$  se numește **conductanță de transfer**.

Sunt de reținut următoarele chestiuni în legătură cu sursele comandate:

- Sursele comandate sunt surse ideale;
- Sursele comandate modelează existența unor fenomene de cuplaj electromagnetic între mărimile ce caracterizează poarta de intrare și mărimile ce caracterizează poarta de ieșire, care pot conduce la scheme echivalente rezistive neconexe;
- Rezolvarea circuitelor cu surse comandate cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff, metodei curenților ciclici și metodei potențialelor nodurilor, se face la fel ca în cazul în care nu există surse comandate. Ecuațiilor corespunzătoare fiecărei metode li se adaugă relațiile care exprimă mărimile care comandă în funcție de necunoscutele metodei, iar apoi aceste relații se înlocuiesc în expresiile surselor comandate.  
În acest fel, în cazul rezolvării circuitelor cu surse comandate cu ajutorul metodei curenților ciclici sau a metodei potențialelor nodurilor, **matricile coeficienților necunoscutelor nu vor mai fi simetrice după rescrierea ecuațiilor**.
- Generatoarele comandate se comportă diferit față de generatoarele independente referitor la teoremele Thévenin, Norton și superpoziției, în sensul că **sursele comandate nu se pasivizează** întrucât ele nu pot exista în absența unei mărimi (curent sau tensiune) de comandă.
- Calculul parametrilor  $R_{AB0}$  și  $G_{AB0}$  (necesari în teoremele generatoarelor echivalente) se poate face prin una din următoarele metode:
  - Se determină mai întâi mărimile  $U_{AB\text{gol}}$  și  $I_{AB\text{sc}}$ , iar apoi se calculează  $R_{AB0}$  și, respectiv,  $G_{AB0}$  cu relațiile

$$R_{AB0} = \frac{U_{AB\text{gol}}}{I_{AB\text{sc}}}; \quad G_{AB0} = \frac{1}{R_{AB_0}} = \frac{I_{AB\text{sc}}}{U_{AB\text{gol}}} \quad (2.39)$$

– Se utilizează metoda de determinare a rezistenței (conductanței) de intrare a unui circuit electric (vezi problema 3.13), **fără a pasiviza sursele comandate.**

Atragem atenția că, pentru circuitele care conțin generatoare comandate, **mărimile  $R_{AB0}$  și  $G_{AB0}$  pot rezulta și negative.**

- În cazul rețelelor cu generatoare comandate, teorema superpoziției afirmă că un curent printr-o latură, oricare, a unui circuit liniar este suma algebrică a curenților pe care îi stabilește în acea latură fiecare dintre sursele independente, **dar de fiecare dată în prezența surselor comandate** (care nu se pasivizează).