

SINTEZĂ LA CONTRACTUL IDEI nr. 682/2009

TRAIECTORII ÎN CÂMP ELECTROMAGNETIC

Obiectiv planificat pentru anul 2009: Elaborarea unor metode integrale și hibride de determinare a câmpului electromagnetic, pentru probleme de regim staționar.

Rezumat

În cazul în care regiunea din domeniul de calcul, ocupată de medii feromagnetice sau conductoare, este mai mică decât cea ocupată de aer sau în cazul în care corpurile feromagnetice sau conductoare sunt în mișcare, utilizarea programelor comerciale de element finit (FEM) au câteva importante dezavantaje: necesita construirea rețelei de discretizare în întreg domeniul de calcul; rețeaua FEM este neregulată atunci când regiunile feromagnetice au porțiuni înguste (de exemplu ecranele feromagnetice); necesită introducerea unor frontiere artificiale; pentru a modela cu acuratețe a întrefierului dintre reperele în mișcare, rețeaua de discretizare trebuie mult îndesită în zona întrefierului, cu consecințe în creșterea dimensiunilor sistemului; dacă dorim să micșorăm dimensiunile rețelei atunci, prin reducerea dimensiunilor elementelor ocupate de aer, frontierele se apropie de piesele feromagnetice sau conductoare și perturba, uneori grav, soluția problemei de câmp; simularea greoaie a rețelei de discretizare din întrefierul dispozitivelor cu piese în mișcare (ori se deformează rețeaua în timp, cu dezavantajul modificării condiționării matricei sistemului, ori se generează o rețea care conține în întrefier o linie poligonală regulată de cuplare a rețelelor pieselor în mișcare și a cărei laturi este corelată cu pasul de timp ales pentru deplasare, cu dezavantajul că procedura se aplica doar pentru mișcări liniare sau circulare); apar forțe parazite în aer, la interfețele dintre domeniile rețelei FEM: dacă folosim potențialul scalar, apar sarcini magnetice parazite (nu se mai verifică pe fiecare element $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$), iar dacă folosim potențialul vector, apar pânze de curent parazite (nu se mai verifică pe fiecare element $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}$).

Studiul performanțelor unei structuri complexe cu câmp electromagnetic se poate face "global", rezolvând câmpul electromagnetic în întreaga structură. Efortul de calcul poate fi imens. Este interesant de analizat posibilitatea separării unor subdomenii cu particularități distincte, cu păstrarea condițiilor de cuplaj electromagnetic între ele. Încercarea de a modela cuplajele electromagnetice prin metode diferențiale (diferențe finite, element finit) necesită construirea unei rețele de discretizare în regiunea dintre subdomenii și prelucrarea sistemului de ecuații astfel încât să se păstreze doar necunoscutele asociate frontierelor subdomeniilor. Metodele integrale pot oferi direct relații pe frontierele subdomeniilor. Formele numerice ale relațiilor de pe frontierele subdomeniilor sunt cunoscute sub numele de matrice de rigiditate.

Metodele numerice de soluționare a ecuațiilor integrale sunt cunoscute sub numele de metode ale elementelor de frontieră (BEM). În comparație cu metodele diferențiale ale elementului finit sau diferențelor finite, principalul avantaj al BEM este că reduce cu o unitate dimensiunea varietății pentru care sunt asociate necunoscutele. În forma care s-a impus, până în prezent, BEM poate fi utilizată cu eficiență la rezolvarea problemelor de câmpuri irotaționale (electrostatică, magnetostatică). Principalul dezavantaj al BEM constă în faptul că nucleul ecuației integrale (funcția Green) poate fi obținută cu ușurință doar în cazul domeniilor nemărginite, cu medii liniare și omogene. O primă aplicație a BEM este calculul câmpului produs de corpuri conductoare, separate de medii omogene. De cele mai multe ori, se impun formele conductoarelor, modificându-se doar pozițiile lor relative rezultând un număr mare de probleme care trebuie calculate. FEM presupune generarea unei rețele în întreg domeniul de calcul, modificarea distanțelor dintre conductoare impunând o nouă generare de rețea și refacerea calculelor pentru matricea sistemului. Au fost elaborate astfel proceduri numerice de mare viteză pentru calculul câmpului electric sau magnetic cu ajutorul BEM. În acest caz, pentru soluționarea numerică a ecuației integrale, rețeaua generată se referă doar la suprafețele corpurilor conductoare și ea rămâne neschimbată la modificarea distanțelor. Sunt recalculați doar coeficienții asociați cuplajelor dintre corpuri conductoare diferite. În plus, soluția numerică obținută prin BEM verifică exact ecuațiile câmpului în domeniul de calcul. Ea poate modela mult mai bine singularitățile din vecinătatea muchiilor. Pentru a obține matricea de rigiditate au fost dezvoltate proceduri rapide de evaluare a integralelor care reprezintă coeficienții sistemului de ecuații pe frontieră. Totodată au fost rezolvate o serie de probleme suplimentare datorate singularităților integralelor. Aceasta a fost posibil de realizat prin evaluarea analitică a integralelor. Au fost dezvoltate programe de calcul BEM care utilizează potențiale scalare precum și vectoare (într-o abordare originală pentru domenii multiple conexe).

Utilizarea metodelor hibride FEM-BEM îmbină, în mare parte, avantajele FEM cu cele ale BEM. Subdomeniile ocupate cu medii neliniare (corpuri feromagnetice) sau având curenți turbionari (corpuri conductoare) sunt tratate prin metode diferențiale, iar influența exteriorului apare sub forma unei relații integrale pe frontieră. Este însă o condiție de frontieră mixtă, în care potențialul dintr-un punct al frontierei depinde de derivatele după normală din toate celelalte puncte (relație descrisă prin matricea de rigiditate). Ca urmare, permite soluționarea problemelor de câmp electromagnetic în domenii nemărginite și omogene prin determinarea

matricei de rigiditate (BEM), poate lua în considerare domeniile neomogene sau neliniare (prin FEM), cuplează problemele de curenți turbionari cu cele staționare. De asemenea, în funcție de necesități, permite folosirea potențialelor scalare și/sau vectoriale în regiunile FEM și/sau BEM. Deoarece matricea de rigiditate este dependentă de timp, corpurile în mișcare pot fi de asemenea introduse cu ușurință, ecuațiile câmpului electromagnetic fiind scrise în sistemul de coordonate Lagrangene atașate domeniilor.

Una dintre preocupările de bază în soluționarea formulării FEM-BEM avută în cadrul contractului, este decuplarea sistemului de ecuații FEM de cel BEM, astfel încât cele două domenii să poată să fie tratate separat în generarea rețelei de discretizare, stabilirea unor funcții de bază modificate, asamblarea matricilor și, implicit modul de rezolvare a lor. Scopul acestor modificări este reducerea complexității calculului numeric, în principal prin rezolvarea iterativă a unui sistem simetric. Este dezvoltată o procedură iterativă originală, de mare eficiență pentru soluționarea cu ajutorul metodelor hibride FEM-BEM a problemelor de câmp electromagnetic în regimurile staționare. Din ecuația integrală pe frontiera domeniului exterior se poate obține valoarea potențialului vector la o valoare dată a derivatei după normală a potențialului. Cunoscând potențialul pe frontieră, prin rezolvarea problemei interioare, se obține valoarea derivatei după normală a potențialului. Soluționarea prin metoda elementului finit a problemei interioare, în condiții de frontieră Dirichlet, este deosebit de avantajoasă. Pot fi utilizate proceduri specifice sistemelor cu matrice rare. Se poate arăta că la o permeabilitate magnetică suficient de mare, convergența metodei este asigurată. În plus, pentru fazele ulterioare (tratarea mediilor neliniare), metoda polarizației magnetice ne va permite adoptarea permeabilității magnetice relative dorite (mult supraunitare) și pentru medii neliniare.

De asemenea, suplimentar față de obiectivele prevăzute în cadrul etapelor anului 2009, au fost inițiate cercetări destinate unor obiective din anul 2010, propunând o tehnică nouă de calcul a câmpului electromagnetic produs de ecrane subțiri. Este cunoscut faptul că traiectoriile corpurilor sub acțiunea forțelor electromagnetice se pot modifica prin plasarea de ecrane conductoare în care se induc curenți turbionari. Densitatea de suprafață a curentului indus în ecranele subțiri cu găuri (structuri multiplu conexe) este reprezentată printr-o combinație liniară de funcții vectoriale de suprafață asociate nodurilor interioare rețelei de discretizare și fiecărui set de noduri care definesc contururile găurilor. Astfel este asigurată condiția de divergență nulă a densității de curent în oricare punct. Densitatea de curent este calculată prin soluționarea unei relații integrale. Noua metodă prezintă avantaje considerabile față de metodele existente, în special în ceea ce privește timpul de calcul și acuratețea rezultatelor. Am extins metoda și pentru ecrane conductoare subțiri aflate în vecinătatea unor corpuri feromagnetice (care se pot afla în mișcare) pentru câmpuri în regim periodic nesinusoidal. Algoritmul dezvoltat are convergența garantată și cuplează metoda de punct fix a polarizației magnetice (care permite ca materialul magnetic neliniar să fie substituit printr-un material care are permeabilitatea aerului, neliniaritatea fiind preluată în fiecare volum al rețelei de discretizare de polarizația care este corectată iterativ în funcție de valorile inducției magnetice) cu o metodă originală de analiză armonică iterativă.

1. Ecuația integrală pe frontieră a potențialului scalar

Fie ecuația

$$-\Delta V = \rho / \varepsilon \quad (1)$$

pe care o verifică potențialul scalar V în domeniul Ω , de frontiera $\partial\Omega$, unde ρ este densitatea de volum a sarcinii electrice și ε , permitivitatea constantă a mediului din Ω .

Se poate arăta că pe frontiera $\partial\Omega$ a domeniului Ω , potențialul scalar verifică relația:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \rho \frac{r}{r^3} dS + \oint_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n_Q} dS_Q - \oint_{\partial\Omega} V \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS_Q = \alpha V(P) \quad (2)$$

unde α este unghiul solid sub care se vede suprafața $\partial\Omega$ din punctul de observație P . Relația (2) poate fi privită ca o ecuație integrală care are necunoscuta V , atunci când se dă $\frac{\partial V}{\partial n}$ sau necunoscuta $\frac{\partial V}{\partial n}$ atunci când se dă V . După

determinarea valorilor V și $\frac{\partial V}{\partial n}$, putem calcula V în orice punct al domeniului, folosind relația (2), cu $\alpha = 4\pi$.

În cazul R^2 , avem:

$$\alpha V(P) = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial V}{\partial n} \ln \frac{1}{R} dl_Q - \oint_{\partial\Omega} V \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}}{R^2} dl_Q + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \rho \ln \frac{1}{r} dS \quad (3)$$

Discretizarea frontierei

Vom prezenta, pe scurt, două proceduri numerice folosite frecvent pentru rezolvarea ecuației integrale (2):

a) *Potențiale constante pe fețe.* Se aproximează suprafața $\partial\Omega$ cu o suprafață poliedrală. Pe fiecare dintre cele F fețe plane, se consideră că potențialele și derivatele sale după normală sunt constante. Se pune punctul de observație P în centrele de greutate G_k ale fețelor σ_k și rezultă un sistem de F ecuații cu F necunoscute

b) *Potențiale cu variație liniară pe fețe.* Se aproximează suprafața $\partial\Omega$ cu o suprafață poliedrală cu F fețe triunghiulare σ_k . Atribuim nodurilor acestei rețele potențiale V_j . Admitem că potențialul V are variație liniară în fiecare triunghi. Deci, el este bine definit de valorile din vârfurile triunghiului. În centrul de greutate al triunghiului, potențialul este media potențialelor din vârfuri. În fiecare triunghi, admitem că derivata normală a potențialului este constantă.

Pe suprafața S'' pe care se dă $\frac{\partial V}{\partial n}$, punem punctul de observație în nodurile rețelei de triunghiuri (cu excepția nodurilor care aparțin și suprafeței S' , pe care se dă valoarea potențialului V). Se obțin N_N ecuații, unde N_N este numărul de noduri interioare suprafeței S'' . Dacă punem punctul P în centrele de greutate ale fețelor de pe suprafața S' , unde se dă potențialul V , se obțin N_F ecuații, unde N_F este numărul de fețe de pe suprafața S' . În total, obținem un sistem de $N_N + N_F$ ecuații cu $N_N + N_F$ necunoscute: potențialele din cele N_N noduri din interiorul suprafeței S'' și derivatele după normală de pe cele N_F fețe de pe suprafața S' .

Observații privind aplicarea metodei elementelor de frontieră

1) Spre deosebire de metodele diferențelor finite (FDM) și elementelor finite, în BEM, necunoscutele sunt asociate unei varietăți bidimensionale ($\partial\Omega$) și nu uneia tridimensională (Ω). Dacă, de exemplu, alegem un cub divizat pe axe în m diviziuni, atunci, în Ω , avem circa m^3 noduri, iar pe $\partial\Omega$, circa $12m^2$ fețe. Rezultă că, în FEM, numărul necunoscutelor este de circa $m/12$ mai mare decât în BEM. În schimb, matricea ce rezultă în BEM este plină, cea din FDM sau FEM fiind rară. Dacă un nod ar fi cuplat cu toate cele 26 noduri ale cuburilor ce conțin nodul, atunci, în cazul FEM, avem $26 m^3$ elemente nenule, în timp ce la FEM putem avea $144 m^4$ elemente nenule.

2) Scrierea ecuației integrale (2) presupune mediu omogen în Ω .

3) Prin formula (2), putem obține în Ω o valoare continuă, indefinit derivabilă pentru V .

4) Dacă Ω are subdomenii omogene, atunci ecuația (2) se pot scrie pentru aceste subdomenii. Pe interfețe, se pun condițiile de conservare pentru potențiale și derivatele lor după normală.

5) Pentru rezolvarea unor probleme, se pot cupla FEM cu BEM. Procedura este folosită pentru domenii nemărginite, unde subdomeniul neomogen (sau neliniar) este tratat prin FEM, exteriorul fiind tratat prin BEM. Se obține astfel, pentru Ω , o condiție de frontieră mixtă, descrisă de forma matriceală ce rezultă din relația (2). În același mod, se poate exprima influența domeniului izolant exterior asupra unui domeniu conductor, în probleme de difuzie electromagnetică.

Primele observații consemnează principalele dezavantaje ale FEM. Marele avantaj al metodei constă în faptul că poate fi aplicată la domenii nemărginite, unde FDM și FEM nu pot fi aplicate. Rezultă de aici și posibilitatea cuplării FEM-BEM, numită și metodă hibridă. Important este și avantajul BEM de la punctul 3) față de FEM. În cazul utilizării FEM și a potențialului scalar, componenta normală a inducției electrice nu se conservă la suprafețele de separare între subdomeniile tetraedrale (se conservă componenta tangențială a lui E). Apar deci sarcini electrice de suprafața pe suprafețele de separare, chiar dacă acestea sunt în vid. Apar și forțe asupra acestor suprafețe. Acest dezavantaj nu apare în cazul BEM.

2. Ecuația integrală pe frontieră a potențialului vector

A fost demonstrată o nouă relație, pe frontieră, a potențialului vector:

$$\alpha \mathbf{A}(\mathbf{r}) = - \oint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{n}'}{R} \times (\nabla' \times \mathbf{A}(\mathbf{r}')) dS' + \oint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \times (\mathbf{n}' \times \mathbf{A}(\mathbf{r}')) dS' + \mathbf{A}_0 \quad (4)$$

Se impun doar circulațiile lui \mathbf{A} pe orice curbe închise de pe $\partial\Omega$. Aceasta este de fapt condiția de frontieră reală impusă lui B_n , care definește unic câmpul magnetic în Ω . Rezultă că și \mathbf{A} este unic definit, cunoscând $\nabla \cdot \mathbf{A}$, $\nabla \times \mathbf{A}$ și A_n pe frontieră. A fost propusă procedura numerică de soluționare a ecuației (4), introducând elementele de muchie pe frontieră și asociind circulațiile pe frontiera corzilor dintr-un coarboare al unui graf al muchiilor de pe frontieră. Procedura a permis soluționarea problemelor de câmp magnetic în domenii multiplu conexe. De exemplu, pentru torul perfect conductor din Fig. 1, cu raza medie de 1m și raza secțiunii de 2 cm, a fost dat un flux magnetic de 1Wb și a fost determinat curentul torului de 3.45×10^7 A, apoi inductivitatea sa.

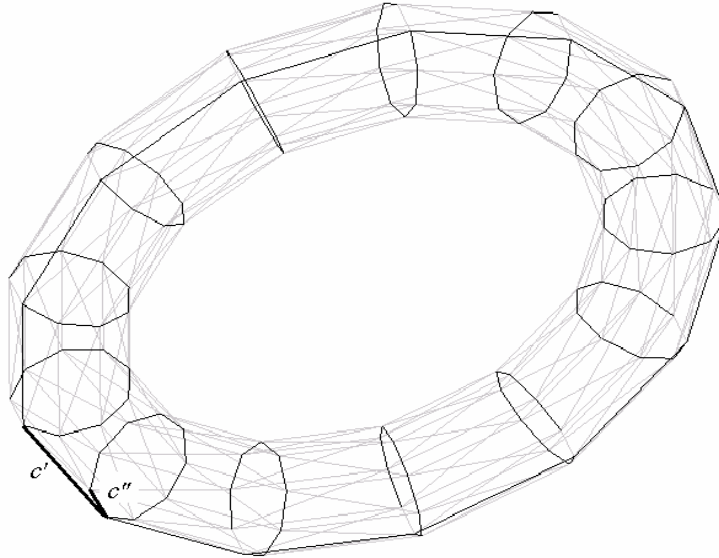


Fig.1. Tor perfect conductor.

3. Metode hibride FEM-BEM

O procedură eficientă pentru soluționarea problemelor de câmp electromagnetic, constă în utilizarea FEM doar pentru domeniile feromagnetice sau conductoare, condiția de frontieră fiind obținută prin ecuația integrală de pe frontiera BEM. Este însă o condiție de frontieră mixtă, în care potențialul dintr-un punct al frontierei depinde de derivatele după normală din toate celelalte puncte. În formă numerică, linia din matricea sistemului corespunzătoare condițiilor de frontieră, este plină și matricea pierde proprietățile de simetrie și diagonal dominantă.

3.1. Metoda elementului finit

Metoda elementelor finite pentru potențialul vector, în regim staționar

În cazul structurilor plan-paralele, problema de câmp magnetic se poate reduce la determinarea unui potențial vector cu o singură componentă, care verifică o ecuație asemănătoare cu cea a potențialului scalar:

$$-\text{div } v \text{grad} A = J + \mathbf{k} \cdot \text{rot} \mathbf{M} \quad (5)$$

unde $v = \frac{1}{\mu}$ și \mathbf{M} este magnetizația.

Proiectăm ecuația (5) pe funcțiile test φ_k , liniar independente și, integrând prin părți, obținem:

$$\int_{\Omega} v \text{grad} \varphi_k \text{grad} A d\Omega - \oint_{\partial\Omega} \varphi_k \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} - \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial A}{\partial n} \varphi_k dl = \int_{\Omega} J \varphi_k d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot (\mathbf{k} \times \text{grad} \varphi_k) d\Omega \quad (6)$$

Cel mai frecvent, în procedurile numerice se exprima A ca funcție de un număr finit de funcții de formă, pe care le-am ales egale cu funcțiile test:

$$A = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \quad (7)$$

și obținem sistemul:

$$\sum_{i=1}^N a_{ki} \alpha_i = b_k, \quad k=1,2,\dots,N \quad (8)$$

unde:

$$a_{ki} = \int_{\Omega} v \text{grad} \varphi_k \cdot \text{grad} \varphi_i d\Omega \quad (9)$$

$$b_k = \oint_{\partial\Omega} \varphi_k \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial A}{\partial n} \varphi_k dl + \int_{\Omega} J \varphi_k d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot (\mathbf{k} \times \text{grad} \varphi_k) d\Omega \quad (10)$$

Observații:

- Procedura nu poate fi extinsă în structuri 3-D,
- Sunt valabile celelalte observații de la subcapitolul anterior.

Utilizarea potențialului vector pentru soluționarea problemelor de câmp magnetic în structuri 3-D implică păstrarea celor 3 componente ale vectorului. Avem:

$$\text{rot} \text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{J} + \text{rot} \mathbf{M} \quad (11)$$

Ecuția (11) are marele dezavantaj al necunoscutei vectoriale. Din acest motiv, mult timp ea a fost evitată în soluționarea problemelor de câmp magnetic, preferându-se potențialul scalar. Există totuși un mare avantaj privind stabilitatea soluției la interfețele dintre două materiale cu permeabilități foarte diferite. Utilizarea potențialului scalar conduce în mod direct la determinarea lui \mathbf{H} . Micile erori de calcul ale lui V , deci ale lui \mathbf{H} , sunt amplificate enorm în mediile de mare permeabilitate, conducând la mari erori ale lui \mathbf{B} . Utilizarea potențialului vector conduce în mod direct la determinarea lui \mathbf{B} , ale cărui erori sunt micșorate enorm în mediile de mare permeabilitate. Din acest motiv, o dată cu dezvoltarea mașinilor de calcul, utilizarea potențialului vector este tot mai frecvent întâlnită la determinarea câmpului magnetic. Însă, în cazul în care, în afară de magnetul permanent, nu mai există corpuri feromagnetice, este preferabilă utilizarea potențialului scalar.

Relația (11) nu definește unic potențialul vector \mathbf{A} când se dă \mathbf{B} și atunci se adaugă condiții suplimentare asupra lui \mathbf{A} , numite condiții de etalonare. De exemplu:

$$\text{div} \mathbf{A} = 0 \quad (12)$$

Nici condiția (12) nu definește unic potențialul \mathbf{A} . Se poate adăuga lui \mathbf{A} un câmp armonic *grad* ϕ ($\Delta\phi=0$), fără a modifica valorile lui $\text{div} \mathbf{A}$ și $\text{rot} \mathbf{A}$. Mai trebuie impuse condiții de frontieră pentru \mathbf{A} .

În locul condiției (12) se poate folosi o interesantă condiție de etalonare:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (13)$$

unde \mathbf{u} este un câmp ale cărui linii de câmp pornesc dintr-un punct P_0 , fără a se intersecta.

Proiectăm ecuația (11) pe funcțiile test \mathbf{W}_k , avem

$$\int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{A} \cdot \text{rot} \mathbf{W}_k d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{W}_k d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot \text{rot} \mathbf{W}_k d\Omega - \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{W}_k \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS + \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{W}_k \times \mathbf{M}) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (14)$$

Funcțiile \mathbf{W}_i pot fi elemente nodale vectoriale sau elemente de muchie.

3.2. Cuplarea metodei FEM cu relațiile integrale pe frontieră

Vom prezenta, în detaliu procedura hibridă FEM-BEM pentru potențialul vector, în structuri 2D.

În cazul structurilor 2D, ecuația integrală pe frontieră a potențialului vector este:

$$\alpha A(\mathbf{r}) = - \oint_{\partial\Omega} \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}')}{R^2} A(\mathbf{r}') dl' + \oint_{\partial\Omega} \ln \frac{1}{R} \frac{\partial A(\mathbf{r}')}{\partial n'} dl' + A_0 \quad (15)$$

Scriind $A = A_F + \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i$, unde A_F verifică condițiile de frontieră Dirichlet (presupunem date

potențialele), ecuația elementelor finite este

$$\int_{\Omega} \text{grad} \phi_k \cdot \text{vgrad} A d\Omega = \int_{\Omega} \phi_k J d\Omega, \quad k=1,2,\dots,N \quad (16)$$

unde N este numărul de funcții test. Între componentele tangențiale ale intensității câmpului magnetic (derivatele după normală ale potențialului) din domeniului exterior și interior există relația de trecere:

$$\frac{\partial A}{\partial n'} = - \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial A}{\partial n} \quad (17)$$

Frontiera este aproximată cu o linie poligonală, unde variația potențialului este liniară, iar $\nu \frac{\partial A}{\partial n}$ este constant.

Relația (15) capătă forma matriceală:

$$A_F = W^{-1} Z \frac{\partial A}{\partial n'} + W^{-1} A_0 \quad (18)$$

Ecuțiile (16) și (18), cu condiția de trecere (17) formează un sistem de ecuații având ca necunoscute potențialele celor N noduri (adică coeficienții α_i) și derivatele după normală pe cele N laturi.

Matricea sistemului de ecuații are câteva dezavantaje: dimensiuni mari, pierde din proprietatea de matrice rară specifică metodelor FEM (liniile asociate frontierelor sunt pline) și nu este simetrică. În cadrul acestei faze este propusă o metodă iterativă pentru soluționarea sistemului de ecuații:

- admițând cunoscută valoarea $\frac{\partial A}{\partial n'}$ pe frontiera domeniului exterior, se determină valoarea lui A_F folosind relația (18);
- folosind ecuația (16), se rezolvă problema de câmp din ecran, având condiții de frontieră Dirichlet. Matricea sistemului este cel mai bine condiționată, rară, simetrică și diagonal dominantă. Se pot folosi tehnicile de matrice rare (în cadrul fazei s-a folosit Gauss-Seidel cu suprarelaxare).

- în urma soluționării problemei de câmp din interiorul ecranului rezultă și valorile $\frac{\partial A}{\partial n}$ pe frontieră. Se corectează valorile $\frac{\partial A}{\partial n'}$ pentru problema exterioră, folosind relația de trecere (17).

Exemplu de calcul: Fie ecranul în forma de U din Fig.2, de grosime 5 mm, lățime 300 mm, având coarneau de 100 mm. Materialul feromagnetic al ecranului are $\mu_r = 1000$. Cele două conductoare sunt parcurse de curenți cu sensuri contrarii, fiecare având solenația de 800Asp. Liniile de câmp sunt desenate în Fig.2.

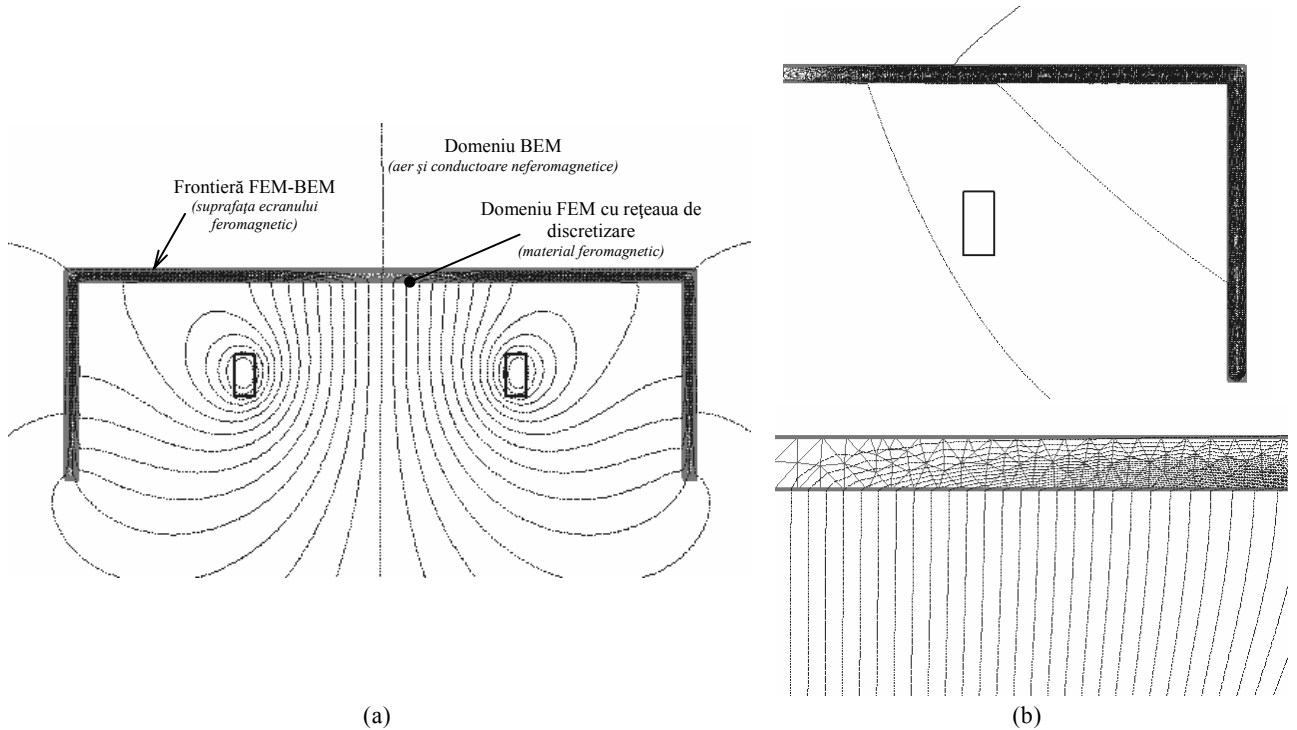


Fig.2 (a) Liniile de câmp și rețeaua FEM pentru un ecran feromagnetic în prezența unui sistem de două conductoare parcurse de curent constant, (b) detalii.

Avantajele acestei proceduri hibride iterative

De multe ori, structurile în care dorim să determinăm câmpul electromagnetic au particularitatea că domeniile feromagnetice sau cele parcurse de curenți turbionari ocupă doar o mică regiune din domeniul de calcul (de exemplu, ecranele feromagnetice). Utilizarea procedurilor hibride FEM-BEM evită construirea rețelei FEM în zonele cu aer, deci permit o reducere spectaculoasă a numărului de necunoscute. Condițiile de frontieră pentru domeniile feromagnetice sau cu curenți turbionari rezultă din forma numerică a ecuațiilor integrale pe frontieră, fiind condiții mixte ce implică potențialele și derivatele după normală ale acestora de pe întreaga frontieră. Rândurile din matricea sistemului de ecuații, asociate frontierei, sunt pline. Matricea sistemului pierde proprietățile din procedurile FEM, deosebit de avantajoase soluționării numerice. Metoda dezvoltată în cadrul acestei etape permite însă păstrarea acestor proprietăți, corectând iterativ, cu ecuațiile BEM, potențialele de pe frontieră, în funcție de derivatele după normală. Problema interioară devine o problemă Dirichlet, bine condiționată, care poate fi soluționată ușor cu tehnicile specifice sistemelor cu matrice rare. Valoarea mare a permeabilității magnetice din domeniile feromagnetice asigură convergența rapidă a procedurii.

Extinderea metodei propuse la medii neliniare se poate face cu metoda de punct fix a polarizației magnetice. Valoarea optimă a permeabilității de calcul relative, care conduce la cea mai rapidă convergență cu metoda polarizației magnetice, este mult supraunitară.

4. Calculul forțelor

4.1. Utilizarea rezultatelor BEM la calculul câmpului electric și al forțelor de natură electrică, în zonele cu aer

După determinarea potențialului și a derivatei sale după normală pe frontiera $\partial\Omega$ a domeniului Ω , se poate calcula intensitatea câmpului electric în orice punct P al domeniului:

$$4\pi V(P) = \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \frac{\rho}{r} dV + \oint_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n_Q} dS_Q - \oint_{\partial\Omega} V \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS_Q \quad (19)$$

În cazul R^2 , avem:

$$2\pi V(P) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \rho \ln \frac{1}{R} dS + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial V}{\partial n} \ln \frac{1}{R} dl_Q - \oint_{\partial\Omega} V \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}}{R^2} dl_Q \quad (20)$$

Apoi, intensitatea câmpului electric se poate determina prin derivare numerică:

$$E_x(x, y) = \frac{1}{\Delta x} \left(V(x - \frac{\Delta x}{2}, y) - V(x + \frac{\Delta x}{2}, y) \right) \quad (21)$$

$$E_y(x, y) = \frac{1}{\Delta y} \left(V(x, y - \frac{\Delta y}{2}) - V(x, y + \frac{\Delta y}{2}) \right) \quad (22)$$

cu valori suficient de mici ale lui Δx și Δy . Sau,

$$2\pi \mathbf{E} = -2\pi \nabla V = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \rho \frac{\mathbf{R}}{R^2} dS + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial V}{\partial n} \frac{\mathbf{R}}{R^2} dl_Q - \oint_{\partial\Omega} V \left(\frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{R}}{R^4} - 2 \frac{\mathbf{n}}{R^2} \right) dl_Q \quad (23)$$

Forța ce se exercită asupra unui corp se poate determina și prin fluxul tensorului Maxwell pe o suprafață oarecare Σ ce înconjoară corpul:

$$\mathbf{F} = \varepsilon \oint_{\Sigma} \left((\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \frac{E^2}{2} \mathbf{n} \right) dS \quad (24)$$

În general, integralele (23) și (24) se fac numeric. Din acest motiv se preferă (21) și (22), cu rezultate foarte bune.

Exemplu de calcul: Între două plăci de 4x40 mm cu +10000 V și -10000 V, la distanța de 40 mm de placa superioară, se află un corp conductor cilindric, de rază 6 mm așezat pe axa de simetrie, cu centrul la distanța de 8 mm față de fața plăcii superioare, cu potențial 0 (Fig.3). Pe el se adună o sarcină de -5.132 C/m și se exercită o forță orientată pe direcția Oy de $3.23 \times 10^{-3} \text{ N/m}$.

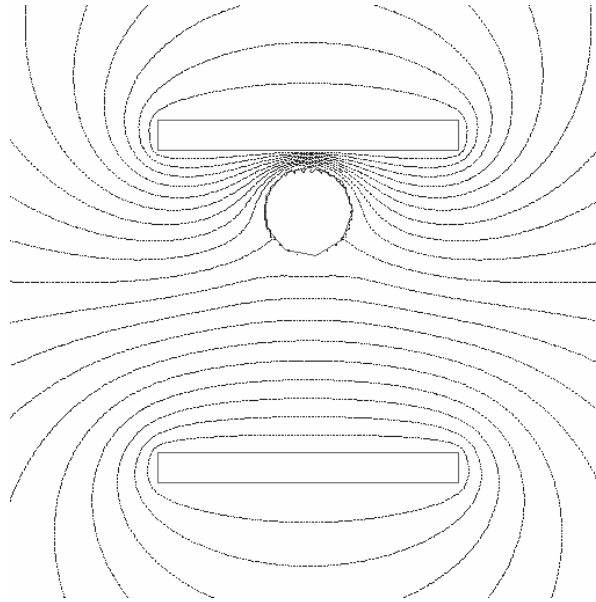


Fig.3. Echipotențiale calculate cu BEM pentru un sistem format dintr-un corp cilindric plasat între două plăci încărcate electrostatic.

4.2. Utilizarea rezultatelor FEM-BEM la calculul câmpului magnetic și al forțelor de natură magnetică în zonele cu aer

În cazul problemelor de câmp magnetic, pentru calculul forțelor se folosește, cu rezultate foarte bune, tot fluxul tensorului Maxwell:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\mu} \oint_{\Sigma} \left((\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \frac{B^2}{2} \mathbf{n} \right) dS \quad (25)$$

Cum suprafața Σ se află în spațiul dintre corpuri (aer), inducția magnetică se determină tot pornind de la potențialul magnetic vector determinat cu relația integrală:

$$2\pi A(\mathbf{r}) = - \oint_{\partial\Omega} \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}')}{R^2} A(\mathbf{r}') dl' + \oint_{\partial\Omega} \ln \frac{1}{R} \frac{\partial A(\mathbf{r}')}{\partial n'} dl' + \mu \int_{\Omega} J \ln \frac{1}{R} dS \quad (26)$$

ce poate fi folosită direct la derivarea numerică:

$$B_x(x, y) = \frac{1}{\Delta y} \left(A(x, y + \frac{\Delta y}{2}) - A(x, y - \frac{\Delta y}{2}) \right) \quad (27)$$

$$B_y(x, y) = \frac{1}{\Delta x} \left(A(x - \frac{\Delta x}{2}, y) - A(x + \frac{\Delta x}{2}, y) \right) \quad (28)$$

cu valori suficient de mici ale lui Δx și Δy . Sau,

$$2\pi \mathbf{B} = -2\pi \mathbf{k} \times \nabla A = \mu \int_{\Omega} J \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{R}}{R^2} dS + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial A}{\partial n} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{R}}{R^2} dl_Q - \oint_{\partial\Omega} A \left(\frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{k} \times \mathbf{R})}{R^4} - 2 \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{n}}{R^2} \right) dl_Q \quad (29)$$

Exemplu de calcul: Un paralelipiped cu secțiunea pătrată de 3x3 mm, și permeabilitatea relativă de $\mu_r = 100$, este plasat între două bobine de 2x 15mm, cu solenație de ± 500 At, distanțate la 60 mm. Forța pe unitatea de lungime are doar componentă pe axa Oy, $F_y = 0.892$ N/m, atunci când pătratul se află la intrarea în bobină (Fig.4).

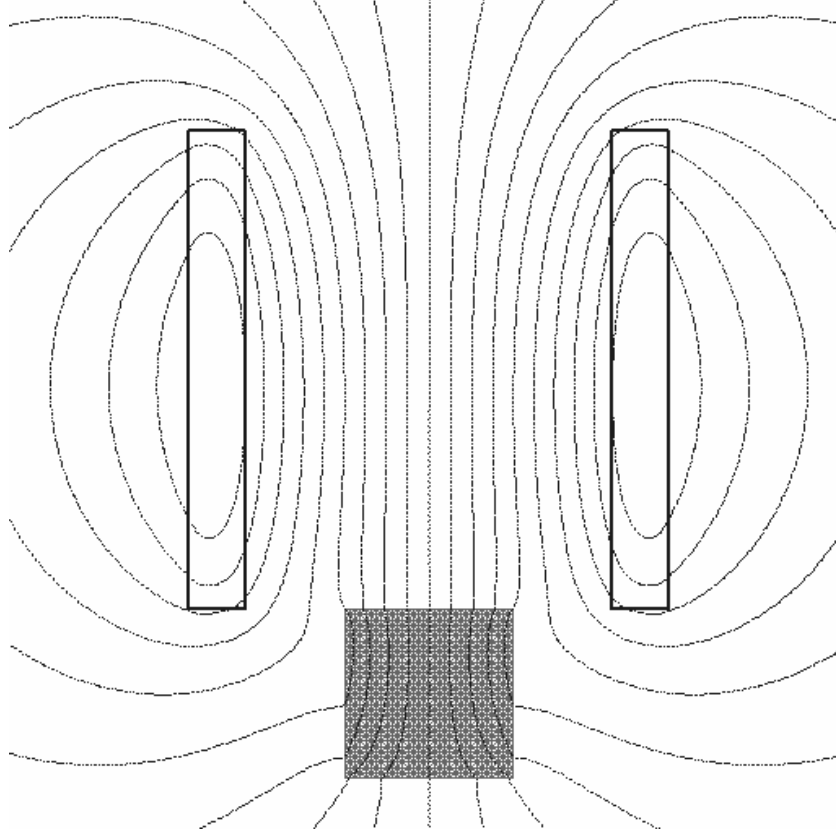


Fig.4. Echipotențiale lui A (liniile de câmp ale lui \mathbf{B}) calculate cu procedura FEM-BEM pentru un sistem format dintr-un paralelipiped plasat la intrarea între două conductoare masive parcurse de curenți.

5. O nouă metodă de calcul a câmpului cvasistaționar în structuri 3D cu ecrane subțiri și corpuri feromagnetice

Ne-am propus rezolvarea ecuației integrale a densității de suprafață \mathbf{J}_s a curentului indus pe suprafața S a unui ecran subțire conductor, neferomagnetic:

$$\rho_s \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) + j\lambda \int_S \frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')}{R} dS' = -j2\pi f \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) - \nabla V(\mathbf{r}) \quad (30)$$

unde $\rho_s = \rho / \Delta$ este rezistivitatea de suprafață, Δ este grosimea ecranului subțire (mai mică decât adâncimea de pătrundere a câmpului), $j = \sqrt{-1}$, $\lambda = f\mu_0 / 2$ f fiind frecvența și μ_0 permeabilitatea aerului, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ cu \mathbf{r} și

\mathbf{r}' vectorii de poziție ai punctului de observație, respectiv punctului sursă, A_0 potențialul magnetic vector produs de surse externe și $-\nabla V$ componenta în potențialul scalar electric a intensității câmpului. Condiția de frontieră pe S este $\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_s = 0$, cu \mathbf{n} versorul normalei la S .

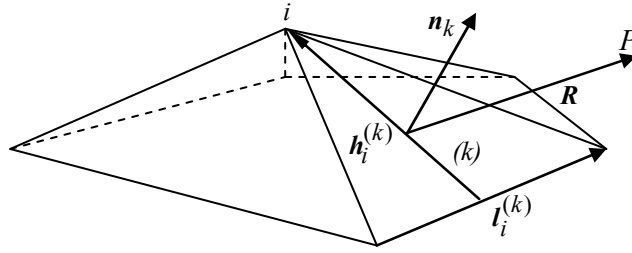


Fig. 5. Suprafața (k) a elementului vectorial asociat nodul i .

Suprafața S este aproximată printr-o suprafață poliedrală cu fațete triunghiuri. Fiecărui nod i i se asociază funcțiile de formă vectoriale, care pentru fiecare suprafață (k) ce conține nodul i , sunt definite de (vezi Fig. 5) $U_i^{(k)} = \frac{1}{2S_k} l_i^{(k)}$, cu $l_i^{(k)}$ vectorul muchiei plasate de-a lungul laturii opuse nodului i din triunghiul (k) și S_k aria acestei fațete. Funcțiile de formă U_i au valori nule pe toate fațetele care nu conțin nodul i .

Astfel \mathbf{J}_s pe suprafața S a ecranului subțire este scrisă sub forma:

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}) \approx \sum_{i=1}^N \alpha_i U_i(\mathbf{r}) + \sum_{m=1}^{N_h} \beta_m \mathbf{W}_m(\mathbf{r}) \quad (31)$$

unde U_i sunt asociate celor N noduri interioare ale suprafeței S , iar \mathbf{W}_m sunt asociate celor N_h contururi ale găurilor practicate în ecran, $\mathbf{W}_m(\mathbf{r}) = \sum_{i \in \{m\}} U_i(\mathbf{r})$, $\{m\}$ fiind mulțimea nodurilor i care definesc conturul găurii m .

Prin reprezentarea densității de suprafață a curentului ca o combinație liniară a funcțiilor de formă U_i și \mathbf{W}_m condiția de divergență nulă a densității de curent este satisfăcută în orice punct al suprafeței de discretizare.

Necunoscutele, coeficienții complecși α_i și β_m din (31), sunt determinate prin proiectarea relației (30) pe funcțiile U_n , $n=1,2,\dots,N$, și $\mathbf{W}_{n'}$, $n'=1,2,\dots,N_h$. Integrând pe ambele fețe ale suprafeței de discretizare rezultă un sistem de $N + N_h$ ecuații algebrice cu necunoscutele α_i și β_m .

Tratarea neliniarității relației constitutive a corpurilor feromagnetice se face prin metoda de punct fix a polarizației care permite înlocuirea mediilor neliniare cu medii liniare având permeabilitatea vidului și o polarizație magnetică care se corectează iterativ în funcție de inducția magnetică. În acest fel, se poate scrie ecuația integrală a densității de curent pe suprafața ecranului, mediul fiind omogen. Contribuția magnetizației apare în termenul liber al ecuației integrale.

Polarizația magnetică se descompune în serie Fourier și ecuația integrală se rezolvă pe fiecare armonică. Pentru început se reține doar fundamentală, efortul de calcul fiind relativ mai mic și convergența mai rapidă (inegalitatea aproximării seriei Fourier fiind mai pronunțată). Pentru a mări acuratețea, se adaugă succesiv și armonicile superioare, în măsura în care acestea modifică rezultatul.

Inducția magnetică se calculează pe armonice și este produsă de sursele externe (de exemplu bobine parcurse de curenți sinusoidali), de curenții turbionari induși în ecran și de polarizațiile magnetice din corpurile feromagnetice. Pentru procedura iterativă, se determină valorile medii în subdomeniile corpurilor feromagnetice, corecția polarizației făcându-se astfel foarte ușor. Pentru calculul forțelor, se determină inducția magnetică în punctele din aer care aparțin suprafeței închise pe care se determină fluxul tensorului lui Maxwell.

Exemplu de calcul: Suprafața unui ecran subțire de rezistivitate $2 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ și grosime de 1 mm este descrisă de $x^2 + y^2 + (z - 0.15)^2 = 0.09$, $x, y \in [-0.21\text{m}, 0.21\text{m}]$. Pe partea concavă, un cub feromagnetic cu latura de 0.2 m este centrat în originea sistemului de coordonate, cu laturile paralele cu axele sistemului de referință și caracteristica $\mathbf{B}-\mathbf{H}$ dată în Fig. 6(c). Sub ecran este plasată coaxial o bobină circulară (de grosime neglijabilă) de diametru de 0.4 m, centrată la $z = -0.2\text{m}$. Prin bobină trece un curent sinusoidal. Ecranul este discretizat printr-o rețea formată din 1600 elemente de suprafață triunghiulare și 841 noduri, iar cubul este împărțit în 192 tetraedre cu 71 noduri (Fig. 6(a)). Liniile curentului indus în ecran sunt reprezentate în Fig. 6(b).

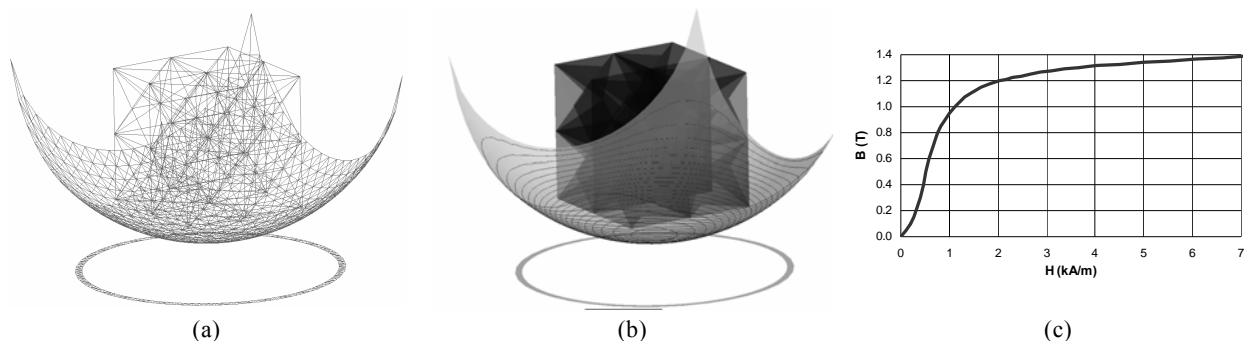


Fig. 6. (a) Rețeaua de discretizare folosită pentru calculul densității de curent și a inducției magnetice, (b) Liniile de câmp ale densității de curent induse în ecran la $t = 4.5$ ms pentru un curent prin bobină de 10^4 At și frecvența de 50 Hz și corpul feromagnetic aflat în vecinătatea sa, (c) Relația $B-H$ a materialului cubului feromagnetic.

Concluzii

Cercetările s-au desfășurat în conformitate cu obiectivele prevăzute inițial. Au fost definitivate toate aspectele de informare și cercetare fundamentală propuse. Au fost obținute rezultate teoretice importante care au dus la dezvoltarea unor metode numerice pentru soluționarea eficientă a problemelor de câmp electric și magnetic în regim staționar și medii liniare. Ele constau în algoritmi și programe testate care permit calculul cu o mare acuratețe și foarte rapid al câmpului electrostatic prin metoda elementelor de frontieră (BEM) și a câmpului magnetic prin metode hibride: element de frontieră - element finit (FEM-BEM). Modificarea geometriei problemelor succesive de rezolvat pentru structuri în mișcare necesită doar recalcularea coeficienților BEM (matricea de rigiditate), rezultați din deplasarea frontierei corpurilor. Metodele dezvoltate reprezintă o variantă foarte convenabilă de calcul al câmpului electric sau magnetic în zonele cu aer pentru orice configurație arbitrară. Mărimile câmpului în aer rezultă din relația integrală BEM într-o formă continuă, indefinit derivabilă aspect extrem de util pentru dezvoltarea unor algoritmi extrem de eficienți de calcul al mărimilor globale (forțe, cuplaje capacitive și inductive) și apoi a traiectoriei corpurilor în structurilor în mișcare.

În etapa finală au fost dezvoltate aceste proceduri eficiente care permit calculul cu mare precizie al forțelor de natură electrică/magnetică în zonele cu aer, pornind de la câmpul determinat prin metodele integrale sau integro-diferențiale dezvoltate anterior.

Conform obiectivelor propuse, rezultate obținute au fost supuse atenției specialiștilor prin prezentarea lor la conferințe sau prin publicare în reviste de specialitate de prestigiu ([1]-[7]).

Diseminarea rezultatelor

- 1) R. Ciric, F. I. Hantila, M. Maricar, S. Marinescu, "Efficient Analysis of the Solidification of Moving Ferromagnetic Bodies With Eddy-Current Control", *IEEE Trans. on Magn. (ISI)*, ISSN 0018-9464, Vol. 45, No. 3, March 2009, p. 1238-1241.
- 2) F. I. Hantila, I. R. Ciric, A. Moraru, M. Maricar, "Modelling eddy currents in thin shields", *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (ISI)*, ISSN: 0332-1649, vol.28, no.4, 2009, pp. 963-972.
- 3) Ioan Florea Hantila, Iosif Nemoianu, Mihai Maricar, Ioana Hantila, Paula Palade, "An iterative procedure for solving FEM-BEM equations", *Journal of Electrical and Electronics Engineering*, ISSN 1844-6035 (categ. B+ 2009), Vol. 2, Nr. 1, 2009, pp. 52-55.
- 4) Iosif Nemoianu, Florea Ioan Hantila, Mihai Maricar, Dan Rucinski, Teodor Leuca, "A method for solving the time-periodic electromagnetic field problem in ferromagnetic shielding", *Journal of Electrical and Electronics Engineering*, ISSN 1844-6035 (categ. B+ 2009), Vol. 2, Nr. 1, 2009, pp. 83-86.
- 5) Ioan Florea Hantila, Mihai Vasiliu, Augustin Moraru, Mihai Maricar, "Utilizing the Polarization Method for Solving a Nonlinear Magnetic Shielding Problem", *JAPMED'6 (6th Japanese-Mediterranean Workshop on Applied Electromagnetic Engineering for Magnetic, Superconducting and Nano Materials) Extended Abstracts Proceedings*, ISBN 978-606-521-346-3, July 27-29, 2009, pp. 93-94.
- 6) Ioan R. Ciric, Florea I. Hantila, Augustin Moraru, Mihai Maricar, „Performance Analysis of Multiply Connected Thin Shields”, *Applied Electromagnetics (II), Proceedings of the 14th International Symposium on Applied Electromagnetics and Mechanics – ISEM 2009, Xi'an, China, September 20-24, 2009, (publicată în JSAEM Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics, Vol. 13, ISBN 978-4-931455-14-6, ISSN 1343-2869, 2009)*, pp. 51-52.
- 7) Ioan R. Ciric, Florea I. Hantila, Mihai Maricar, "Field Analysis for Thin Shields in the Presence of Ferromagnetic Bodies", *Proceedings of the 17th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, COMPUMAG 2009* (CDROM), 22-26 November, Florianópolis, Brazil, pp. 119-120.