CALCULUL EFICIENT AL TFD ÎN PRELUCRAREA INFORMAȚIEI DIGITALE

Petru CLEMINTE* Costin CEPIŞCĂ* Stergios GANATSIOS**

** Universitatea POLITEHNICA Bucureşti, costin@wing.ro*
*** Technological Educational Institute of West Macedonia,*
Kozani, Grecia, ganatsio@kozani.teikoz.gr

***Abstract.**.This paper describes the algorithms to obtain a fast and accurate Discrete Fourier Transform (DFT) for the signals, with application in the domain of measurement technique of electrical energy.*

Cuvinte cheie: TDF, semnal digital, informație.

1. INTRODUCERE

O secvență de durată finită $x(n)$ de lungime L ($x(n) = 0$ pentru $n < 0$ şi $n \geq L$) are transformata Fourier:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j\omega n} \qquad 0 \leq \omega \leq 2\pi \tag{1}$$

în care indicii de sumare indică faptul că semnalul este nul în afara plajei $0 \leq n \leq L-1$. Când se eşantionează $X(\omega)$ la frecvențe egal depărtate între ele, de valori $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \ldots,$ $N-1$, cu $N \geq L$, eşantioanele rezultate sunt:

$$X(k) \equiv X\left(k\frac{2\pi}{N}\right) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}$$
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{2}$$

Relația (2) reprezintă *transformata Fourier discreta* (TFD) a lui $x(n)$. Pe de altă parte, relația care permite refacerea secvenței $x(n)$ din eşantioanele în domeniul frecvență:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{3}$$

este denumită transformata Fourier discretă inversă (ITFD).

2. CALCULAREA EFICIENT A TFD

Transformata Fourier rapidă (FFT) reprezintă o implementare rapidă a TFD. Ea se bazează pe tehnica în care calcularea TFD este împărțită în probleme mai mici şi mai simple şi apoi TFD este reconstruită din TFD simple.

$X(k) = X(\omega_k)$ poate fi scrisă sub forma componentelor sale:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} x(n), \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} W_N^{k(2n)} x(2n) + \sum_{n=0}^{N/2-1} W_N^{k(2n+1)} x(2n+1) \tag{5}$$

Această expresie permite evidențierea cele două secvențe de lungime $N/2$:

$$\begin{aligned} g(n) &= x(2n) \\ h(n) &= x(2n+1) \end{aligned} \quad , \quad n = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1 \tag{6}$$

precum şi a celor două TFD corespunzătoare lor:

$$\begin{aligned} G(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} W_{N/2}^{kn} g(n) \\ H(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} W_{N/2}^{kn} h(n) \end{aligned} \quad , \quad k = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1 \tag{7}$$

Relația (5) devine:

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k), \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{8}$$

Deci, *X(k)* poate fi refăcut din două TFD în (*N/2*) puncte *G(k)* şi *H(k)*. Apar în plus *N* înmulțiri de forma $W_N^k H(k)$. Utilizând periodicitatea funcțiilor *G(k)* şi *H(k)*, numărul de înmulțiri poate fi redus la *N/2*. Cele *N* ecuații din relația (8) pot fi scrise ca două seturi de *N/2* ecuații în felul următor:

$$\begin{aligned} X(k) &= G(k) + W_N^k H(k) \\ X(k+N/2) &= G(k+N/2) + W_N^{k+N/2} H(k+N/2) \end{aligned} \quad , \quad k = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1 \tag{9}$$

Utilizînd proprietatea de periodicitate a TFD se obțin expresiile:

$$\begin{aligned} G(k+N/2) &= G(k) \\ H(k+N/2) &= H(k) \\ W_N^{N/2} &= \left(e^{-2\pi j/N}\right)^{N/2} = e^{-j\pi} = -1 \end{aligned} \tag{10}$$

Relațiile de reconstrucție a TFD devin:

$$\begin{aligned} X(k) &= G(k) + W_N^k H(k) \\ X(k+N/2) &= G(k) - W_N^k H(k) \end{aligned} \quad , \quad k = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1 \tag{11}$$

fiind cunoscute sub numele de relații de reconstrucție fluture. Grupul de relații de deasupra generează jumătatea de sus a TFD *N*-dimensionale iar grupul de relații de jos generează cealaltă jumătate a vectorului ***X***. Vectorial, relațiile (11) pot fi scrise astfel:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N/2-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \vdots \\ G_{N/2-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_{N/2-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_N^0 \\ W_N^1 \\ \vdots \\ W_N^{N/2-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{N/2} \\ X_{N/2+1} \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \vdots \\ G_{N/2-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_{N/2-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_N^0 \\ W_N^1 \\ \vdots \\ W_N^{N/2-1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

În aceste ecuații matriceale, înmulțirile se realizează între componentele de acelaşi rang. Împreună, cele doua ecuații matriceale generează întregul vector ***X*** al TFD. Operațiile de mai sus pot fi redate grafic ca în Fig.1.

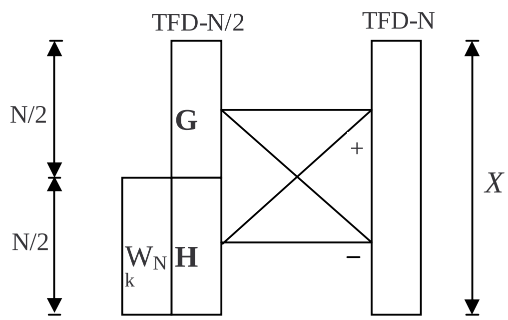

Fig.1.Refacerea TFD de lungime *N* din dou   TFD de lungime *N*/2 conform algoritmului

Pentru a începe procesul de reconstrucție este necesar să se cunoască TFD de pornire, având dimensiunea 1. Din momentul în care sunt cunoscute aceste TFD unidimensionale, ele pot fi îmbinate în TFD de dimensiuni 2, 4, 8, ş.a.m.d. TFD de pornire se obțin din secvența de eşantioane de intrare cu ajutorul mecanismului de inversare a biților (*bit reversal* sau *shuffling*). În felul acesta, algoritmul FFT tipic constă în trei părți distincte:

- amestecarea celor *N* eşantioane de intrare conform algoritmului shuffling;
- efectuarea celor *N* TFD calculate într-un singur punct;
- îmbinarea celor *N* TFD calculate într-un singur punct pentru a obține TFD în *N* puncte.

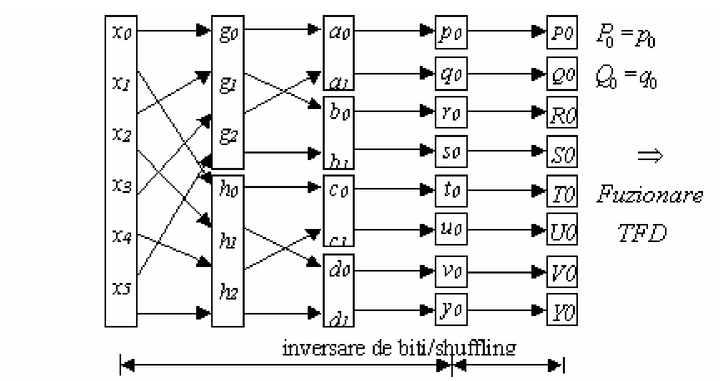

Fig.2. Procesul shuffling generează *N* semnale de dimensiune 1

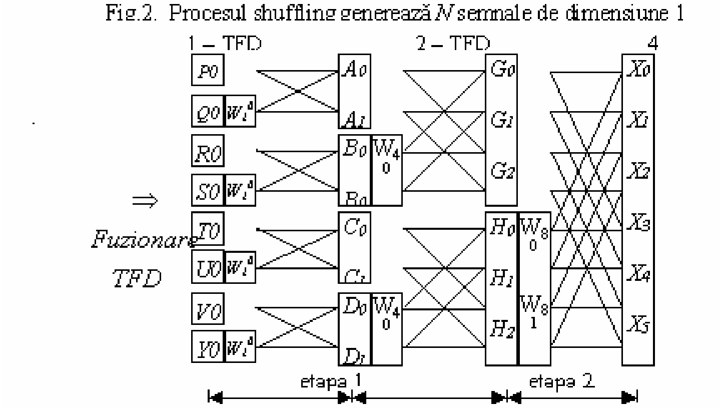

Fig.3. Procesul de fuzionare TFD

Etapa a doua de efectuare a celor *N* TFD într-un punct este doar de natură pur conceptuală. În realitate, ea lasă valorile eşantioanelor de intrare nemodificate, dar face trecerea din domeniul timp în domeniul frecvență. Din punct de vedere al calculului propriu-zis aceasta etapa este trivială, întrucât D $\boldsymbol{X} = [X_0]$ într-un punct al vectorului de intrare unidimensional $\boldsymbol{x} = [x_0]$ este egală chiar cu acest vector de intrare, adică $X_0 = x_0$, ceea ce rezultă şi din ecuația (4) în cazul particular $N = 1$. Procesul de inversare a biților pentru $N = 8$ este redat în Fig.2 şi cuprinde $B = \log_2(N)$ etape. În timpul primei etape vectorul $\boldsymbol{x}$ al eşantioanelor de intrare de lungime N este divizat în două blocuri $\boldsymbol{g}$ şi $\boldsymbol{h}$, fiecare de lungime (N/2), $\boldsymbol{g}$ conținând eşantioanele de rang par şi $\boldsymbol{h}$ pe cele de rang impar. În timpul celei de-a doua etape, acelaşi mecanism de subdivizare este aplicat lui $\boldsymbol{g}$, rezultând două blocuri de lungime (N/4) notate $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ şi lui $\boldsymbol{h}$ rezultând blocurile $\{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ ş.a.m.d. - Fig.3. Eventual, semnalul $\boldsymbol{x}$ este decimat în timp până se ajunge la N subsecvențe de dimensiune 1. Operațiile fluture de fuzionare sunt aplicate fiecărei perechi a TFD pentru a genera noua TFD de dimensiune dublă.

Se observă că procesul shuffling generează semnale din ce în ce mai mici:

$$\boldsymbol{x} \rightarrow \{\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}\} \rightarrow \{\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}, \{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}\} \rightarrow \ . \ . \ . \rightarrow \{\text{semnale de dimensiune } 1\}$$

iar procesul de fuzionare reconstruieşte TFD corespuzătoare:

$$\{\text{TFD pe 1 punct}\} \rightarrow \ . \ . \ . \rightarrow \{\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}, \{\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}\}\} \rightarrow \{\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}\} \rightarrow \boldsymbol{X}$$

3. CALCULAREA EFICIENTĂ A TFD A DOUĂ SECVEN E REALE

Algoritmul FFT este proiectat ca să realizeze multiplicări şi adunări complexe, chiar dacă, de cele mai multe ori, datele de intrare sunt reale. Explicația acestui fapt este că factorii de fază W sunt complecşi şi deci, după prima etapă a algoritmului, toate variabilele devin complexe.

În virtutea faptului ca algoritmul FFT poate să manipuleze secvențe de intrare complexe, se poate exploata acest fapt în scopul calculării simultane a TFD a două secvențe reale.

Presupunem că $x_1(n)$ şi $x_2(n)$ reprezintă două secvențe de valori reale de lungime N, şi fie $x(n)$ o secvență de valori complexe definită astfel:

$$x(n) = x_1(n) + jx_2(n) \qquad 0 \le n \le N-1 \tag{13}$$

Fie $X_1(k)$ şi $X_2(k)$ TFD ale secvențelor $x_1(n)$ şi $x_2(n)$. Evident că secvențele $x_1(n)$ şi $x_2(n)$ pot fi exprimate în funcție de $x(n)$ astfel:

$$x_1(n) = \frac{x(n) + x^*(n)}{2} \tag{14}$$

$$x_2(n) = \frac{x(n) - x^*(n)}{2}$$

În acest caz, TFD a secvențelor $x_1(n)$ şi $x_2(n)$ devin:

$$X_1(k) = \frac{1}{2}\left\{DFT\left[x(n)\right] + DFT\left[x^*(n)\right]\right\} \tag{15}$$

$$X_2(k) = \frac{1}{2j}\left\{DFT\left[x(n)\right] - DFT\left[x^*(n)\right]\right\}$$

Ținând cont că TFD a lui $x^*(n)$ este $X^*(N-k)$ rezultă:

$$X_1(k) = \frac{1}{2}\left[X(k) + X^*(N-k)\right] \tag{16}$$

$$X_2(k) = \frac{1}{2j}\left[X(k) - X^*(N-k)\right]$$

Prin urmare, prin efectuarea unei singure TFD pe o secvență de valori complexe $x(n)$, se poate obține TFD a două secvențe reale de aceeaşi lungime cu $x(n)$, cu o mică cantitate adițională de operații care sunt necesare pentru calcularea mărimilor $X_1(k)$ şi $X_2(k)$ din $X(k)$.

Este evident faptul că aceasta metodă se pretează foarte bine a fi aplicată în toate sistemele în care se monitorizează curentul şi tensiunea în scopul calculării puterii şi/sau energiei electrice. În acest caz, secvența $x_1(n)$ va fi de exemplu tensiunea $u(n)$ eşantionată iar secvența $x_2(n)$ va fi reprezentată de secvența eşantioanelor de curent *i(n)*. Este uşor de arătat că amplitudinea armonicelor de curent şi de tensiune precum şi faza acestora pot fi exprimate astfel:

$$\begin{aligned}
&X(k) = TFD[u(n) + ji(n)] = X_R(k) + jX_I(k)\\
&|U(k)| = \sqrt{[X_R(k) + X_R(N-k)]^2 + [X_I(k) - X_I(N-k)]^2}\\
&|I(k)| = \sqrt{[X_I(k) + X_I(N-k)]^2 + [X_R(k) - X_R(N-k)]^2}\\
&\Psi_U(k) = \arctan\frac{X_I(k) - X_I(N-k)}{X_R(k) + X_R(N-k)}\\
&\Psi_I(k) = -\arctan\frac{X_R(k) - X_R(N-k)}{X_I(k) + X_I(N-k)}
\end{aligned} \tag{17}$$

4. ALGORITMUL GOERTZEL

Algoritmul FFT ia *N* puncte din datele de intrare şi produce o secvență de ieşire de *N* puncte ce corespunde TFD a datelor de intrare.

Există unele aplicații în care interesează numai un număr redus de valori ale TFD, deci nu este de dorit a se efectua întreaga TFD. În aceste cazuri, algoritmul FFT poate să fie mai puțin eficient decât calcularea directa a TFD. De fapt, când numărul de valori dorite ale TFD este mai mic decât $\log_2(N)$, o calculare directă a valorilor dorite ale TFD este mai eficientă.

Calcularea directă a TFD poate fi interpretată ca o operație de filtrare lineară a secvenței de date de intrare. Această filtrare lineară ia forma unui banc paralel de rezonatoare, fiecare rezonator selectând una dintre frecvențele corespunzătoare celor *N* frecvențe ale TFD $\omega_k = 2\pi k/N$, în care $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Algoritmul Goertzel exploatează periodicitatea factorilor de faza $\{W_N^k\}$ şi permite calcularea TFD ca o operație de filtrare lineară. Datorită faptului că $W_N^{-kN} = 1$, se poate multiplica TFD cu acest factor:

$$X(K) = W_N^{-kN}\sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{km} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{-k(N-m)} \tag{18}$$

Se remarcă faptul că ecuația (18) are forma unei convoluții. Prin urmare, dacă definim secvența $y_k(n)$ ca:

$$y_k(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)W_N^{-k(n-m)} \tag{19}$$

este evident că $y_k(n)$ este o convoluție între secvența de durată finită $x(n)$ de lungime *N* cu un filtru al cărui răspuns la impuls este:

$$h_k(n) = W_N^{-kn}u(n) \tag{20}$$

Ieşirea acestui filtru la $n = N$ furnizează valoarea TFD la frecventa $\omega_k = 2\pi k/N$. Cu alte cuvinte:

$$X(k) = y_k(n) \quad ; \quad n = N \tag{21}$$

Filtrul cu răspunsul $h_k(n)$ are transformata Z:

$$H_k(z) = \frac{1}{1 - W_N^{-k}z^{-1}} \tag{22}$$

Se poate utiliza ecuația cu diferențe corespunzătoare filtrului dat de (22) şi în felul acesta se calculează $y_k(n)$ recursiv:

$$y_k(n) = W_N^{-k} y_k(n-1) + x(n) \qquad y_k(-1) = 0 \tag{23}$$

Ieşirea dorită este $X(k) = y_k(N)$, pentru $k = 0, 1, \ldots, N - 1$. Pentru a o calcula, factorul de fază W_N^{-k} trebuie calculat o singură dată şi memorat.
Multiplicările complexe şi adunările inerente din ecuaţia (23) pot fi evitate combinând perechi de rezonatoare având poli complex conjugaţi. În acest caz, transformata Z a filtrului cu doi poli complex conjugaţi are forma:

$$H_k(z) = \frac{1 - W_N^k z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi k / N) z^{-1} + z^{-2}} \tag{24}$$

Realizarea acestui filtru este redată în Fig.4 şi este descrisă de următoarele ecuaţii:

$$v_k(n) = 2\cos\frac{2\pi k}{N} v_k(n-1) - v_k(n-2) + x(n) \tag{25}$$
$$y_k(n) = v_k(n) - W_N^k v_k(n-1)$$

cu condiţiile iniţiale $v_k(-1) = v_k(-2) = 0$.

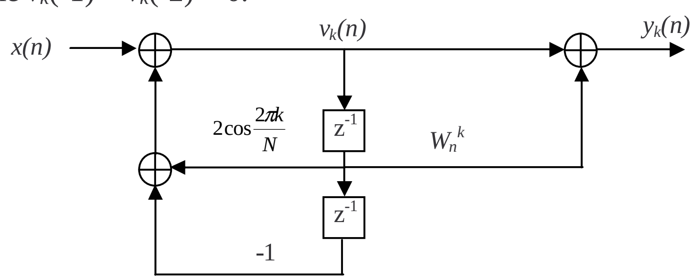

Fig. 4. Realizarea rezonatorului cu doi poli.

Pentru o secvenţă de intrare reală $x(n)$, algoritmul necesită $N + 1$ multiplicări reale pentru a furniza $X(k)$. Algoritmul Goertzel este interesant de utilizat în cazurile în care TFD trebuie să fie calculată într-un număr mic de puncte M, unde $M \leq \log_2(N)$.

5. CONCLUZII

Metodele de calcul prezentate pentru transformata Fourier discretă permit o abordare mai rapidă a calculului numeric a puterii şi energiei în cazul contoarelor digitale. Pe baza acestor rezultate se doreşte implementarea unui software specializat pentru calculului puterilor şi energiei electrice în regimuri sinusoidale şi nesinusoidale.

BIBLIOGRAFIE

[1] Ackenhausen,J., *Signal Processing Technology and Applications,* IEEE Press, 1995.
[2] Jackson,L,- *Signals, Systems, and Transforms*, Addison-Wesley,1993
[3] Max,J.,*Méthodes et techniques de traittement du signal*. Ed.Masson, Paris, 1989.
[4] Ohta, N., *Modeling and Signal Processing*, Artech House, Boston, MA,1994.
[5] Bertocco, M.,*Numerical algorithms for power measurements*, Eur. Trans. Elec. Power Eng., vol.3, Jan./93.