ATEE-2004

REGIMURILE DE FUNCŢIONARE ALE CIRCUITELOR NEAUTONOME ŞI AUTONOME

F. Constantinescu, M. Niţescu

Universitatea "Politehnica", Bucureşti, Romania, Catedra de Electrotehnica, e-mail: florinc@ferrari.lmn.pub.ro

Abstract *The key concepts allowing to define the operating „regimes" of nonautonomous and autonomous circuits are presented without proofs in order to be understood by the engineering students in the first and second years. An operating „regime"is defined by certain significant properties of the circuit response like periodicity, behavior for* $t \to \infty$, *convergence toward an equilibrium point a.s.o..*

1. INTRODUCERE

Deşi toate cursurile de Teoria Circuitelor conţin capitolele Circuite de Curent Continuu, Circuite de Curent Alternativ, Circuite în Regim Nesinusoidal, de regulă lipseşte o definire riguroasa a acestora împreună cu precizarea claselor de circuite care pot funcţiona într-un anumit regim. Aceste probleme au fost abordate in literatură în special de Chua[1,2] si Hasler [3] folosind un aparat matematic de nivel foarte înalt, greu accesibil unui student în ştiinţe inginereşti din anii I-II. Această lucrare îsi propune să prezinte, fără demonstraţii şi la un nivel accesibil, principalele rezultate din acest domeniu, grupul ţintă fiind studenţii din anii I-II ai facultăţilor de profil electric. Conţinutul lucrarii este împărţit în două capitole: Circuite neautonome şi Circuite Autonome

2. CIRCUITE NEAUTONOME

2.1.Definiţii şi proprietăţi

Un circuit neautonom conţine cel puţin o sursă independentă al cărui parametru (e(t) sau $i_S(t)$) este o funcţie neconstantă de timp. Dacă circuitul nu conţine nici o astfel de sursă spunem că acesta este autonom. Ne putem aştepta ca răspunsul unui circuit neautonom la o excitaţie periodică să devină periodic atunci când timpul care a trecut de la conectarea surselor independente devine suficient de mare. Circuitele care au această propietate se dovedeşte că au şi alte două proprietăţi remarcabile: conservarea spectrului şi atenuarea exponenţială a componentelor tranzitorii. Spunem că aceste trei proprietăţi caracterizează un circuit cu *comportare obişnuită.*

Definirea riguroasă a comportării obişnuite se face utilizând răspunsul în regim permanent.

Fie un circuit, în cazul general neliniar, excitat cu surse independente de perioadă T, cu vectorul de stare $z = (q_C, \varphi_L)$ unde q_C este vectorul sarcinilor condensatoarelor şi φ_L este vectorul fluxurilor bobinelor. Presupunem că circuitul are ecuaţiile de stare în formă normală $\dot{z} = f(z,t)$. *Răspunsul în regim permanent* al acestui circuit este $z_p(t) = \lim_{t\to\infty} z(t)$. Evident determinarea lui $z(t)$ se poate face numai cunoscând starea iniţială a circuitului $z(0)$. Cel puţin teoretic există posibilitatea ca plecând din două stări iniţiale diferite $z_1(0)$ şi $z_2(0)$ să se ajungă la două răspunsuri în regim permanent $z_{p1}(t)$ şi $z_{p2}(t)$ care sunt diferite între ele. Se pot construi exemple de circuite cu această proprietate.

Spunem că un circuit are *soluţie unică în regim permanent* dacă orice pereche de soluţii $z_1(t)$ şi $z_2(t)$ satisfac relaţia

$\lim_{t\to\infty} \|z_1(t) - z_2(t)\| = 0$ unde $\|\cdot\|$ este norma Euclidiană iar z_1 şi z_2 sunt soluţii care corespund unor stări iniţiale diferite între ele.

Proprietatea 1. Spunem că un circuit are *răspuns periodic unic de perioada excitaţiei* dacă acesta, fiind excitat cu surse independente cu parametri periodici de perioadă T, are un răspuns unic $z_p(t)$ în regim permanent şi $z_p(t)$ este periodic de perioadă T.

Numim *componentă tranzitorie a răspunsului* unui circuit mărimea $z_t(t) = z(t) - z_p(t)$. Evident pentru un circuit care are proprietatea 1, $\lim_{t\to\infty} z_t(t) = 0$. Proprietatea următoare se referă la modul în care tinde $z_t(t)$ către zero.

Proprietatea 2. Un circuit *atenuează exponenţial componentele tranzitorii* dacă există numerele reale pozitive $\tau_{\min}, \tau_{\max}, k_{\min}, k_{\max}$ astfel încât "distanţa" între două soluţii $z_1(t)$ şi $z_2(t)$ corespunzătoare condiţiilor iniţiale $z_1(0)$ şi $z_2(0)$ satisface relaţiile:

$$k_{\min}\|z_1(0) - z_2(0)\| e^{-\frac{t}{\tau_{\min}}} < \|z_1(t) - z_2(t)\| < k_{\max}\|z_1(0) - z_2(0)\| e^{-\frac{t}{\tau_{\max}}}$$

Altfel spus, pentru un circuit cu proprietatea 2, "distanţa" dintre soluţii evoluează fiind încadrată de "distanţa" între stările iniţiale ponderată cu $e^{-\frac{t}{\tau_{\min}}}$ şi cu $e^{-\frac{t}{\tau_{\max}}}$ unde $\tau_{\min}$ şi $\tau_{\max}$ sunt "constantele de timp" minimă şi maximă ale circuitului. Remarcăm că nu există algoritmi pentru determinarea (fără a calcula în prealabil răspunsul circuitului) valorilor $\tau_{\min}, \tau_{\max}, k_{\min}, k_{\max}$ pentru un circuit neliniar cu structură arbitrară.

Combinaţia spectrală a surselor unui circuit alimentat numai în curent continuu şi cu surse sinusoidale de pulsaţii $\omega_k (k = 1,2,...)$ este mulţimea pulsaţiilor $\omega = \sum_k n_k \omega_k$ unde n_K sunt orice numere întregi.

Proprietatea 3. Un circuit *conservă combinaţia spectrală* dacă combinaţia spectrală S_{zp} corespunzătoare soluţiei de regim permanent este inclusă în combinaţia spectrală S_s corespunzătoare surselor independente.

De exemplu dacă un circuit este alimentat cu două surse sinusoidale de pulsaţii ω_1 şi ω_2 combinaţia spectrală S_s corespunzătoare acestor surse este $n_1\omega_1 + n_2\omega_2, n_1, n_2 \in I$ adică $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 - \omega_2$, $-\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 + 2\omega_2$, $\omega_1 - 2\omega_2, ...$.

Dacă şi răspunsul în regim permanent este periodic şi are numai componente armonice care fac parte din S_s, atunci spunem că acest circuit conservă combinaţia spectrală.

2.2. Condiţii suficiente pentru o comportare obişnuită

Un circuit liniar exponenţial stabil are o comportare obişnuită. Considerăm un astfel de circuit având o stare iniţială nenulă şi fiind excitat cu o excitaţie periodică. Într-adevăr răspunsul acestui circuit se poate scrie ca $z(t) = z_0(t) + z_e(t)$ unde $z_0(t)$ este răspunsul la excitaţie nulă care depinde de starea iniţială $z(0)$ şi $z_e(t)$ este răspunsul la stare iniţială nulă care depinde de excitaţie.

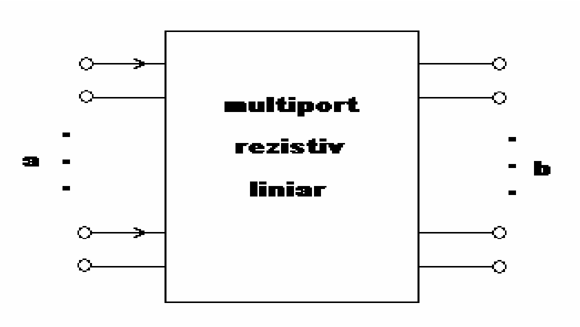
Se ştie că $z_0(t) = \sum P_k(t) e^{s_k t}$ unde s_k sunt frecvenţele naturale ale circuitului cu $R_e s_k < 0$ şi $P_k(t)$ sunt polinoame în t de grad egal cu ordinul de multiplicitate al frecvenţei naturale s_k - 1. Deci $\lim_{t\to\infty} z_0(t) = 0$ (Proprietatea 2) şi $z_p(t) = \lim_{t\to\infty} z_e(t)$. Dacă se calculează $z_e(t)$ cu transformata Laplace se obţine $z_e(t) = z_{et}(t) + z_{ep}(t)$ unde $z_{et}(t)$ este o componentă tranzitorie cu $\lim_{t\to\infty} z_{et}(t)=0$ şi $z_{ep}(t)$ este răspunsul în regim permanent la excitaţie periodică. In acest caz $z_{ep}(t)$ se poate calcula separat pentru fiecare componentă armonică a excitaţiei deci $z_p(t)$ este periodic de perioada excitaţiei (Proprietatea 1) şi are aceleaşi componente armonice ca excitaţia (Proprietatea 3).

Există *condiţii suficiente care definesc clase de circuite neliniare cu comportare obişnuită*. Pentru a le formula este necesar să definim caracteristica pasivă şi caracteristica strict local pasivă a unui element de circuit. Această caracteristică poate fi $f(u,i)=0$ pentru un rezistor, $f(\varphi,i)=0$ pentru o bobină sau $f(q,u)=0$ pentru un condensator.

Caracteristica pasivă $f(x,y)=0$ este o curbă în planul xy pentru care $x\cdot y\geq 0$ (curba trece numai prin cadranele I şi III).

Caracteristica strict local pasivă $f(x,y)=0$ are proprietatea că pentru oricare două puncte $(x_0,y_0),(x_1,y_1)$ de pe caracteristică, mărimile $\Delta x=x_1-x_0$ şi $\Delta y=y_1-y_0$ satisfac relaţia $\Delta x\cdot\Delta y>0$. Aceasta înseamnă că o caracteristică strict local pasivă are întotdeauna o pantă $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ strict pozitivă deci este strict crescătoare.

Fie un multiport rezistiv liniar fără surse independente cu porţi de tensiune (a) şi de curent (b).



Acest multiport are reprezentarea hibridă :

$$\begin{bmatrix} i_a \\ u_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H_{aa} & H_{ab} \\ H_{ba} & H_{bb} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_a \\ i_b \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial h_a}{\partial u_a} & \frac{\partial h_a}{\partial i_b} \\ \frac{\partial h_b}{\partial u_a} & \frac{\partial h_b}{\partial i_b} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H_{aa} & H_{ab} \\ H_{ba} & H_{bb} \end{bmatrix}$$

Spunem că acest resistor multipolar este reciproc dacă H_{aa} şi H_{bb} sunt simetrice şi $H_{ab}=-H^t_{ba}$. Această definiţie se poate generaliza pentru un multiport rezistiv neliniar fără surse independente de ecuaţii : $i_a=h_a(u_a,i_b)$ $u_b=h_b(u_a,i_b)$ considerând matricea incrementală (Jacobianul). Un rezistor dipolar este întotdeauna reciproc.

Reciprocitatea se poate defini şi pentru multiporţii capacitivi sau inductivi. Un multiport capacitiv neliniar controlat în tensiune cu ecuaţia constitutivă $q=\hat{q}(u)$ este reciproc dacă matricea capacităţilor dinamice (Jacobianul lui $\hat{q}$) $\frac{\partial \hat{q}}{\partial u}$ este simetrică. Un multiport inductiv controlat în curent cu ecuaţia constitutivă $\varphi=\hat{\varphi}(i)$ este reciproc dacă matricea inductivităţilor dinamice (Jacobianul lui $\hat{\varphi}$) este simetrică. Un condensator dipolar sau o bobină dipolară sunt întotdeauna reciproce.

<u>Circuite cu elemente dinamice liniare</u>. Un circuit cu elemente dinamice liniare are comportare

obişnuită dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:
1. Nu există nici o buclă formată numai din condensatoare, bobine şi/sau surse de tensiune.
2. Nu există nici o secţiune formată numai din condensatoare, bobine şi surse de curent.
3. Toate rezistoarele sunt strict local pasive.
4. Parametrii surselor independente $(e_k(t), i_{sk}(t))$ sunt functii periodice de clasă C^1.

Circuite RC (RL). Un circuit RC (RL) are comportare obişnuită dacă sunt îndeplinite condiţiile:
1. Nu există nici o buclă (secţiune) formată numai din condensatoare (bobine) şi/sau surse de tensiune (curent).
2. Rezistoarele sunt liniare, pasive şi reciproce.
3. Condensatoarele (bobinele) au caracteristici strict crescătoare de clasă C^1.
4. Parametrii surselor independente $(e_k(t), i_{sk}(t))$ sunt funcţii periodice de clasă C^1.

Circuite RLC neliniare care funcţionează la "semnale mici"
Fie un circuit neliniar RLC cu surse independente având componente constante în timp şi componente variabile în timp care sunt periodice de perioada T. Un astfel de circuit are proprietăţile 1 şi 3 pentru orice valori ale componentelor constante în timp ale surselor independente dacă sunt îndeplinite condiţiile:
1. Nu există nici o buclă (secţiune) formată numai din condensatoare, bobine şi surse de tensiune (current).
2. Elementele dinamice au caracteristici strict local pasive.
3. Rezistoarele au caracteristici strict local pasive de clasă C^1.
4. Relaţiile constitutive ale condensatoarelor $(q = \hat{q}(u)\ \ sau\ \ u = \hat{u}(q))$ şi bobinelor $(\varphi = \hat{\varphi}(i)\ \ sau\ \ i = \hat{i}(\varphi))$ sunt de clasă C^1.
5. Amplitudinile componentelor periodice ale surselor independente sunt "suficient de mici".

Deşi nu s-a demonstrat şi necesitatea acestor condiţii pentru ca circuitele respective să aibă o comportare obişnuită, se pot construi exemple în care numai una dintre aceste condiţii nefiind îndeplinită circuitul are o comportare neobişnuită.
Comportarea neobişnuită a circuitelor neautonome cu excitaţii periodice de perioadă T se poate caracteriza prin:
- răspunsuri în regim permanent care conţin subarmonice (componente de frecvenţele $\frac{f}{2}, \frac{f}{3}, \frac{f}{4}, \ldots$ unde $f = \frac{1}{T}$),
- răspunsuri în regim permanent care nu sunt periodice (de exemplu răspunsuri haotice),
- răspunsuri periodice multiple (în funcţie de starea iniţială) la aceeaşi excitaţie.

Exemplu: circuitul L, R, diodă cu capacitate neliniară (de exemplu Lucrarea nr. 8 din [5]).

2.3. Regimurile de funcţionare

Un regim de funcţionare este definit de anumite proprietăţi semnificative ale răspunsului circuitului. Aceste proprietăţi sunt semnificative atât din punct de vedere teoretic , cât şi din punct de vedere al aplicaţiilor tehnice.
Presupunem că la $t=t_0$ se conectează în circuit toate sursele independente. Dacă răspunsurile se consideră pentru orice $t \geq t_0$ spunem că circuitul funcţionează în *regim tranzitoriu*. Dacă răspunsurile se consideră pentru $t \to \infty$ spunem că circuitul funcţionează în *regim permanent*.
O importanţă deosebită o au circuitele cu excitaţii periodice. Regimul permanent al unui circuit cu comportare obişnuită în care parametrii surselor independente au componente constante şi componente periodice de aceeaşi perioadă este *regimul periodic de perioada excitaţiei* sau *nesinusoida*l. Un circuit liniar exponenţial stabil alimentat cu astfel de surse va avea în regim permanent toate răspunsurile periodice de perioada excitaţiei, deci va funcţiona

în acest caz în regim periodic de perioada excitaţiei. Mai mult, orice răspuns va avea numai componentele armonice ale excitaţiilor, deci nu sunt generate componente armonice care nu sunt prezente în excitaţii. Dacă circuitul este neliniar se pot genera componente armonice care nu există în excitaţii dar aparţin combinaţiei spectrale a acestora. Regimul periodic de perioada excitaţiei are o importanţă deosebită în sistemul electroenergetic şi în circuitele de comunicaţii. Un circuit liniar exponential stabil cu toate excitatiile sinusoidale de aceeaşi perioadă are în regim permanent toate răspunsurile sinusoidale de perioada excitatiei; acesta este un *circuit de curent alternativ*.
Regimul permanent al unui circuit cu comportare neobişnuită excitat cu surse independente având parametrii periodici de aceeaşi perioadă poate fi:

- un regim periodic de perioada excitaţiei
- un regim în care răspunsurile sunt periodice dar de perioade egale cu un multiplu al perioadei excitaţiei (regimul subarmonic)
- un regim în care răspunsurile nu sunt periodice (regimul haotic)

Regimul subarmonic şi regimul haotic nu se utilizează în general în tehnică. În ultimii ani au fost propuse circuite de comunicaţii şi de procesare a imaginilor care funcţionează în regim haotic.

3. CIRCUITE AUTONOME

3.1.Definiţii şi proprietăţi

Fie $y = h(x)$ relaţia constitutivă a unui element dipolar (rezistor, condensator sau bobină). Elementul de circuit corespunzător acestei relaţii se spune că este *puternic local pasiv* dacă există constantele $\bar{\gamma} > \underline{\gamma} > 0$ astfel încât pentru orice x' şi x" avem $\underline{\gamma}(x'-x'')^2 \le (x-x'')[h(x')-h(x'')] \le \bar{\gamma}|x'-x''|^2$.
Această definiţie exprimă faptul că panta caracteristicii elementului este cuprinsă între $\underline{\gamma}$ şi $\bar{\gamma}$. Definiţia caracterului puternic local pasiv se poate extinde pentru un element multiterminal (rezistor, bobină sau condensator) cu ecuaţia constitutivă $y = h(x)$ adică să existe $\bar{\gamma} > \underline{\gamma} > 0$ astfel încât pentru orice x' şi x" $\underline{\gamma}\|x'-x''\|^2 \le \|x-x''\|\|h(x')-h(x'')\| \le \bar{\gamma}\|x'-x''\|^2$.
Dacă acest caracter puternic local pasiv există numai pentru $\|x'\| \ge k_0$ şi $\|x''\| \ge k_0$ unde $k_0 > 0$ spunem că elementul corespunzător este *eventual puternic local pasiv*. Semnificaţia acestei definiţii este că elementul este puternic local pasiv cu excepţia unei zone din jurul originii (la un element dipolar cu excepţia zonei $-k_0 \le x \le k_0$).

3.2. Condiţii suficiente de stabilitate

Un circuit autonom liniar exponenţial stabil are proprietatea că toate răspunsrile la excitaţie nulă tind către 0 când $t \to \infty$. Originea din spaţiul stărilor este în acest caz un punct de echilibru stabil.
Un circuit neliniar are un număr impar de puncte de echilibru. Pentru circuitele cu mai multe puncte de echilibru se defineşte *stabilitatea completă* care înseamnă că orice soluţie a ecuaţiilor de stare (pentru orice stare iniţială) tinde către un punct de echilibru când $t \to \infty$.
Nu există o teoremă de stabilitate completă pentru un circuit RLC cu surse comandate având mai multe puncte de echilibru.
Dacă circuitul are un singur punct de echilibru şi toate soluţiile tind către acesta când $t \to \infty$ se spune că circuitul are *stabilitate asimptotică globală.* Există două seturi de condiţii suficiente pentru astfel de circuite:

<u>Criteriul I de stabilitate asimptotică globală</u>

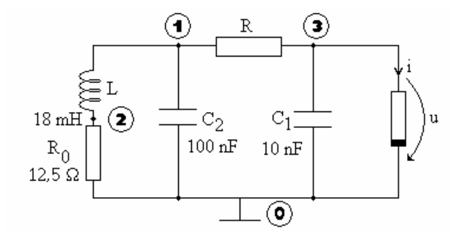
- Nu există nici o buclă (secţiune) formată numai din condensatoare, bobine şi surse de tensiune (curent).
- Toate rezistoarele sunt puternic local pasive.
- Toate elementele inductive şi capacitive sunt reciproce şi puternic local pasive.

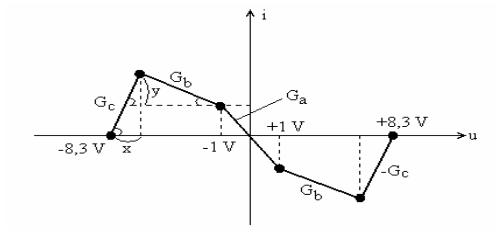
<u>Criteriul II de stabilitate asimptotică globală</u>

- Nu există nici o buclă (secţiune) formată numai din condensatoare, bobine şi surse de tensiune (curent).
- Orice buclă (secţiune) care conţine o sursă de tensiune (curent) conţine şi un condensator (o bobină).
- Toate rezistoarele sunt strict pasive.
- Toate elementele inductive şi capacitive sunt reciproce şi eventual puternic local pasive.

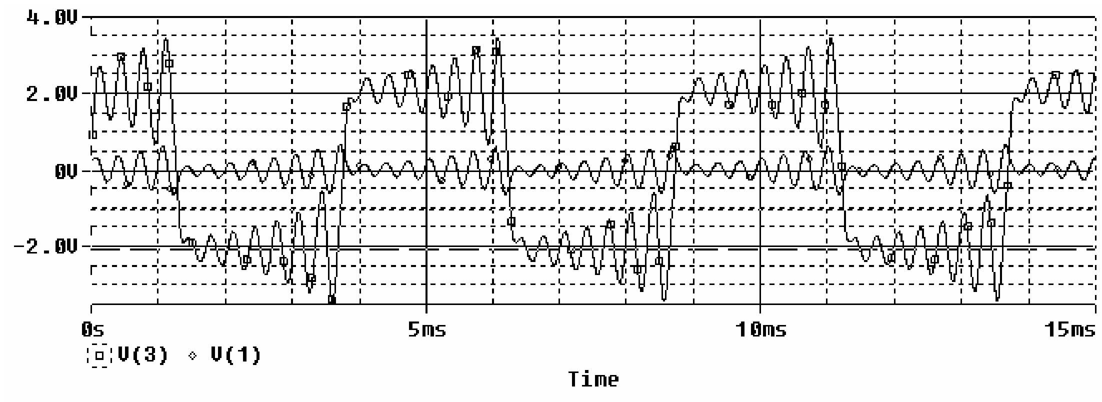
Se observă că la criteriul II introducerea conditiei a doua face mai puţin restrictive condiţiile a treia şi a patra.

Exemplu: circuitul lui Chua

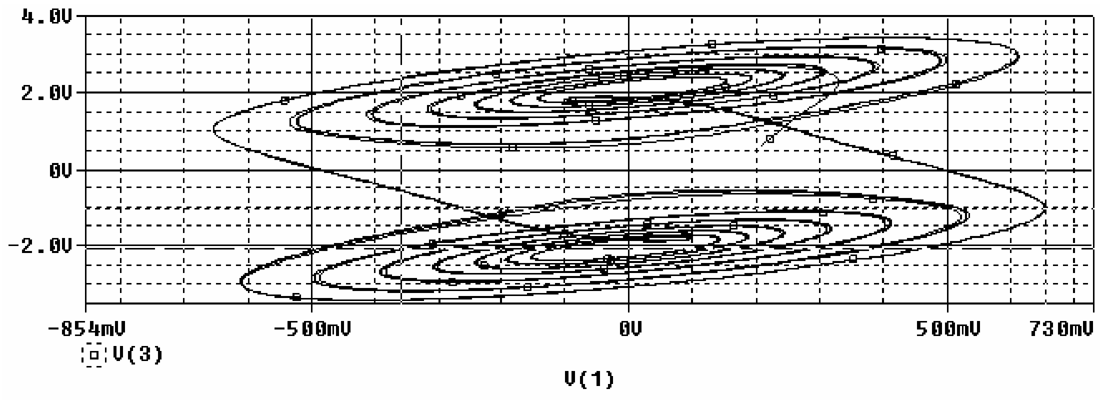




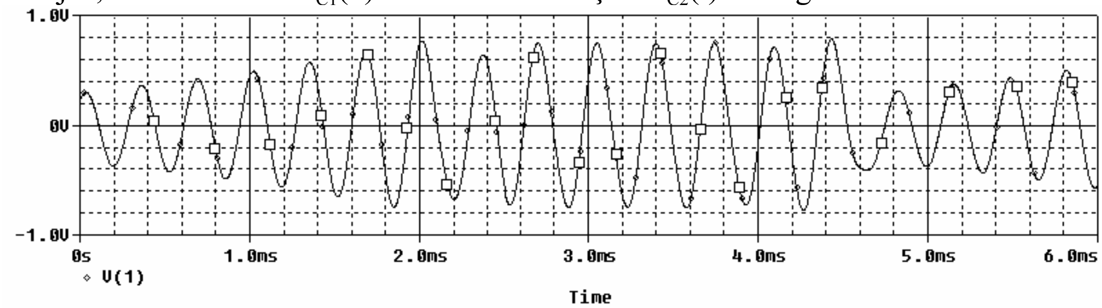
$G_a = -0{,}7575 \quad mS$, $G_b = -0{,}40909 \quad mS$,
$G_c = 4{,}5455 \quad mS$

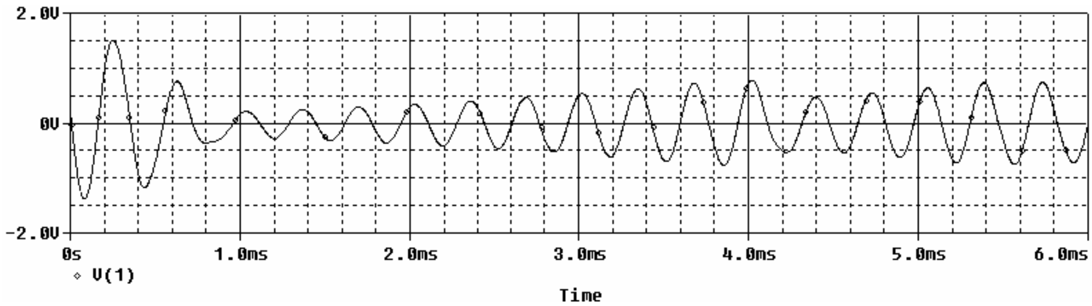


Tensiunile u_{C1} (V(3)) şi u_{C2} (V(1)) pentru R=1,73 KΩ par a fi, analizate separat, marimi periodice. Comportarea haotică se observă din graficul dependenţei între aceste tensiuni.



Unui răspuns haotic al unui circuit autonom îi sunt specifice: *caracterul aleator, dependenţa puternică de condiţiile iniţiale* şi un *spectru de bandă largă.* De exemplu, pentru R=1,81818KΩ şi $i_L(0)$=1,81mA, $u_{C1}(0)$=.222V, $u_{C2}(0)$=-2,286V $u_{C2}(t)$ are forma din figura de mai jos, iar schimbând $u_{C1}(0)$=.222014V se obţine $u_{C2}(t)$ din figura următoare.





Caracterul aleator al răspunsurilor este ilustrat de formele de undă prezentate. Un semnal periodic are un spectru discret format din componentele armonice dintre care de obicei numai cele de ordin relativ redus (armonicele 1, 2, 3, 4,...,n) sunt semnificative, spectrul fiind nenul într-o bandă relativ îngustă de frecvenţe. Un semnal haotic (neperiodic) are un spectru continuu de bandă foarte largă.

3.3. Regimurile de funcţionare

La un circuit autonom distingem între o evoluţie către un punct de echilibru care este considerată o comportare obişnuită („cuminte”) şi o altfel de evoluţie care presupune un răspuns oscilant sau haotic.
Circuitele autonome care sunt global asimptotic stabile sau complet stabile funcţionează intr-un *regim stabil*. Presupunem că într-un astfel de circuit se conectează la $t=t_0$ toate sursele independente. Ca şi în cazul unui circuit neautonom, dacă răspunsurile se consideră pentru orice $t \geq t_0$ spunem că circuitul funcţionează în *regim tranzitoriu*. Dacă răspunsurile se consideră pentru $t \to \infty$ spunem că circuitul funcţionează în *regim permanent*. Acest regim permanent, corespunzător valorilor din punctul de echilibru, este *regimul de curent continuu*.

Circuitele autonome care au toate răspunsurile periodice de aceeaşi perioadă funcţionează intr-un *regim oscilatoriu* (de exemplu oscilatorul RLC serie).
Circuitele autonome care au cel puţin un răspuns haotic funcţionează intr-un *regim haotic.*
Nu există formulări simple ale unor condiţii suficiente de funcţionare in regim oscilatoriu şi în regim haotic.

Bibliografie

[1] L. O. Chua, D. N. Green, A qualitative analysis of the behavior of dynamic nonlinear networks: stability of autonomous networks, IEEE Trans.on CAS , vol.CAS 23, no.1, jan. 1976 p.355-379[2] L.
[2] L.O. Chua, D. N. Green, A qualitative analysis of the behavior of dynamic nonlinear networks:steady-state solutonsof nonautonomous networks, Trans.on CAS , vol.CAS 23, no.9, sept.. 1976 p.531-550
[3] M. Hasler, J. Neirynck, Circuits nonlineaires,Presses Polytechnique Romande, 1985
[4] F. Constantinescu, M. Nitescu, Electrotehnica, Partea I –Teoria Circuitelor, Curs pentru Facultatea de Automatica si Calculatoare, 2001-2004, **http://ferrari.lce.pub.ro/studenti**
[5] F. Constantinescu, A. Ionescu, C. V. Marin, M. Nitescu, Aanliza circuitelor electrice cu PSPICE-Lucrari de laborator, Editura Printech, Bucuresti, 2003.